

Universidade de Aveiro  Departamento de Matemática

1. Determine os valores próprios e vetores próprios de cada uma das seguintes matrizes. Averigue se a matriz é diagonalizável e, em caso afirmativo, indique uma sua matriz diagonalizante, bem como a matriz diagonal correspondente.

(a) $\begin{bmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

(b) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 3 & 0 \\ 3 & 2 & -2 \end{bmatrix}$

(c) $\begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}$

(d) $\begin{bmatrix} 4 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 2 \\ -1 & -2 & 0 \end{bmatrix}$

(e) $\begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}$

(f) $\begin{bmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 2 & 0 & -2 \\ 3 & 1 & -4 \end{bmatrix}$

2. Considere a matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}$.

(a) Mostre que 1 é um valor próprio de A e determine o subespaço próprio de A associado ao 1.

(b) Verifique se A é diagonalizável e, em caso afirmativo, indique uma matriz diagonal semelhante a A .

3. Seja A uma matriz quadrada. Mostre que A é singular se e só se 0 é um valor próprio de A .

4. Mostre que A e A^T possuem os mesmos valores próprios.

5. Seja A uma matriz quadrada e λ um valor próprio de A . Mostre que

(a) λ^k é um valor próprio de A^k , para $k \in \mathbb{N}$;

(b) $\frac{1}{\lambda}$ é um valor próprio de A^{-1} , caso A seja invertível.

6. Se A e B são matrizes invertíveis, mostre que AB e BA são matrizes semelhantes.

7. Se A é diagonalizável, mostre que

(a) A^T é diagonalizável;

(b) A^k é diagonalizável, para $k \in \mathbb{N}$;

(c) A^{-1} é diagonalizável, caso A seja invertível.

8. Considere a matriz $A = \begin{bmatrix} 2 & -2 & 3 \\ 0 & 3 & -2 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}$.

(a) Determine os valores próprios e subespaços próprios de A .

(b) Verifique que A é diagonalizável e indique uma matriz invertível P tal que $P^{-1}AP$ é diagonal.

(c) Calcule A^5 , utilizando o facto de A ser diagonalizável.

9. Determine os valores dos parâmetros reais a e b para os quais $(1, 1)$ é um vetor próprio e 0 é um valor próprio da matriz $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ a & b \end{bmatrix}$.

10. Considere a matriz $A = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ k & k+1 \end{bmatrix}$.

(a) Calcule o polinómio característico de A , assim como os seus valores próprios.

(b) Determine os subespaços próprios de A .

(c) Indique, justificando, os valores do parâmetro real k para os quais A é diagonalizável.

(d) Para os valores de k obtidos na alínea anterior, determine uma matriz diagonal D e uma matriz não singular P tal que $A = PDP^{-1}$.

(e) Para $k = -1$, determine A^{2013} .

11. Considere as matrizes $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \alpha & \beta & \gamma \\ \delta & \theta & \mu \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ a & b & c \end{bmatrix}$ e os vetores $u = (1, 1, 1)$, $v = (1, 0, -1)$ e $w = (1, -1, 0)$, onde $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \theta, \mu, a, b, c \in \mathbb{R}$ são parâmetros a determinar. Calcule $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \theta, \mu, a, b, c$ de modo a que os vetores u, v e w sejam vetores próprios de A e $-1, 0$ e 1 sejam valores próprios de B .
12. Sejam $A \in \mathbb{R}^{4 \times 4}$ e $X, Y, Z, W \in \mathbb{R}^4$ não nulos tais que $AX = AY = 0$, $AZ = Z$ e $AW = -W$, sendo $\{X, Y\}$ linearmente independente.
- Indique o polinómio caraterístico de A e os valores próprios de A .
 - Indique, justificando, se A é diagonalizável e se existe uma base de \mathbb{R}^4 constituída por vetores próprios de A .
13. Seja A uma matriz quadrada de ordem n e $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ os seus valores próprios. Mostre que $\det(A) = \lambda_1 \lambda_2 \cdots \lambda_n$.
14. Diagonalize as matrizes simétricas seguintes através de uma matriz P diagonalizante ortogonal:
- $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$;
 - $\begin{bmatrix} 0 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & 0 \end{bmatrix}$;
 - $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 2 \end{bmatrix}$.
15. Considere a matriz simétrica $A = \begin{bmatrix} 3 & -4 & -4 \\ -4 & 1 & 0 \\ -4 & 0 & 5 \end{bmatrix}$.
- Mostre que 9 é um valor próprio de A .
 - Diagonalize A através de uma matriz diagonalizante ortogonal.
16. Seja A uma matriz simétrica 3×3 tal que $(1, 0, 0)$ e $(0, 1, 1)$ são vetores próprios de A associados ao valor próprio 1 e $(0, -1, 1)$ é um vetor próprio de A associado ao valor próprio -3 .
- Determine o subespaço próprio de A associado ao valor próprio 1 .
 - Justifique que A é diagonalizável e determine a matriz A .

Exercícios suplementares

17. Seja $A = \left[\begin{array}{c|cccc} 0 & & & & \\ \vdots & & & & \\ 0 & & & I_{n-1} & \\ \hline a_0 & a_1 & \cdots & a_{n-1} & \end{array} \right] \in \mathbb{R}^{n \times n}$, onde $a_0, a_1, \dots, a_{n-1} \in \mathbb{R}$, com polinómio caraterístico $p_A(\lambda)$.
- Verifique que $p_A(\lambda) = 0$ se e só se $\lambda^n = a_{n-1}\lambda^{n-1} + \dots + a_1\lambda + a_0$.
 - Mostre que, se λ é um valor próprio de A , $X_\lambda = (1, \lambda, \dots, \lambda^{n-1})$ é um vetor próprio associado a λ .
 - Justifique que o espaço próprio associado a cada valor próprio λ é $U_\lambda = \langle X_\lambda \rangle$.
[Sugestão: as última $n - 1$ colunas de $A - \lambda I$ são linearmente independentes, logo...]
 - Sejam $n = 3$, $a_0 = 0$, $a_1 = -1$ e $a_2 = 2$. Verifique as propriedades das alíneas anteriores e prove que A não é diagonalizável.

Considere a sucessão de valores reais (x_k) , com $k \in \mathbb{N}_0$, e seja (X_k) a sucessão de vetores em \mathbb{R}^n definida por $V_k = (x_k, x_{k+1}, \dots, x_{k+n-1})$ — sendo, portanto, $V_{k+1} = (x_{k+1}, x_{k+2}, \dots, x_{k+n})$.

- Prove que (x_k) satisfaz a equação de recorrência $x_{k+n} = a_{n-1}x_{k+n-1} + \dots + a_1x_{k+1} + a_0x_k$ se e só se $V_{k+1} = AV_k$, para cada $k \in \mathbb{N}_0$.
- Verifique $V_k = A^k V_0$ para cada $k \in \mathbb{N}_0$. O que acontece quando A é diagonalizável?

18. Seja $P = [X_1 \ \cdots \ X_m] \in \mathbb{R}^{n \times m}$ uma matriz cujas colunas são m vetores próprios de $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ e $D \in \mathbb{R}^{m \times m}$ a matriz que contém, na diagonal, os correspondentes valores próprios $\lambda_1, \dots, \lambda_m$. Note-se que os vetores próprios não têm de ser linearmente independentes, nem têm de ser distintos (ou não nulos) os valores próprios.

(a) Demonstre a equação matricial dos vetores próprios: $AP = PD$.

(b) Justifique que $A^2P = PD^2$ e deduza que $A^kP = PD^k, \forall k \in \mathbb{N}_0$.

Para $m = n$, suponha-se que $\det(P) \neq 0$.

(c) Mostre que $\mathcal{B} = (X_1, \dots, X_n)$ é uma base (ordenada) de \mathbb{R}^n .

(d) Verifique que $P = M(\mathcal{B}, \mathcal{C})$ é a matriz de mudança da base \mathcal{B} para a base canónica de \mathbb{R}^n .

(e) Prove que, para qualquer $X \in \mathbb{R}^n$ e qualquer $k \in \mathbb{N}_0$,

$$[A^k X]_{\mathcal{B}} = D^k [X]_{\mathcal{B}}.$$

Aplicações

19. A sucessão de Fibonacci $(0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, \dots)$ é definida pela equação de recorrência $x_{k+2} = x_{k+1} + x_k$, sendo $k \in \mathbb{N}_0$, $x_0 = 0$ e $x_1 = 1$. Seja $V_k = (x_k, x_{k+1}) \in \mathbb{R}^2$ para cada $k \in \mathbb{N}_0$. Usando a notação e os resultados do exercício 17,

(a) determine a matriz $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ tal que $V_{k+1} = AV_k$ para $k \in \mathbb{N}_0$;

(b) determine o polinómio característico $p_A(\lambda)$ e calcule os valores próprios de A ;

(c) prove que A é diagonalizável e determine uma matriz diagonalizante e a matriz diagonal correspondente;

(d) determine uma fórmula para calcular x_k para qualquer $k \in \mathbb{N}_0$ e indique o valor de x_{22} .

20. **Modelo de Leontief de economia fechada.** Este modelo descreve uma economia em que todos os bens (ou serviços) produzidos são consumidos pelos próprios setores produtivos. Portanto, em comparação com o modelo apresentado no exercício 47 da primeira folha prática, neste caso não há *procura final* e a *procura* (que corresponde à *procura intermédia*) é igual à produção.

Suponha-se que existem n indústrias I_1, \dots, I_n e que, num dado período de tempo, a indústria I_i produz B_i unidades do bem b_i e consome C_{ij} unidades do bem b_j produzido por I_j , com $i, j = 1, \dots, n$. Então,

$$a_{ij} = \frac{C_{ij}}{B_j} \text{ é a fração do total de bens produzidos pela indústria } j \text{ que é utilizado pela indústria } i.$$

Seja $A = [a_{ij}] \in \mathbb{R}^{n \times n}$. Sendo a economia *fechada*, para todo o $j = 1, \dots, n$ tem-se que

$$a_{1j} + \cdots + a_{nj} = \frac{C_{1j}}{B_j} + \cdots + \frac{C_{nj}}{B_j} = \frac{C_{1j} + \cdots + C_{nj}}{B_j} = 1,$$

pois o numerador (o total do bem b_j que foi consumido) é igual ao denominador (a quantidade B_j que foi produzida). Isto significa que **a soma das entradas de cada coluna de A é igual a 1**.

Considere-se agora o seguinte problema: é possível determinar o preço p_i de cada bem b_i para que os custos de produção de cada indústria, para adquirir os bens de que precisa, sejam iguais à receita obtida com a venda do bem produzido (condição de equilíbrio)? Para I_i , a receita é $B_i p_i$ e os custos são $C_{i1} p_1 + \cdots + C_{in} p_n$. Logo, a condição de equilíbrio é $B_i p_i = C_{i1} p_1 + \cdots + C_{in} p_n = a_{i1} B_1 p_1 + \cdots + a_{in} B_n p_n$ para todo o $i = 1, \dots, n$.

(a) Verifique que, definindo o vetor $X = (B_1 p_1, \dots, B_n p_n)$, a condição de equilíbrio é $X = AX$.

(b) Seja $Y = (1, \dots, 1) \in \mathbb{R}^n$. Explique por que razão $A^T Y = Y$.

(c) Justifique que existe sempre um vetor X que satisfaz $X = AX$ (ou seja, um preço p_i para cada bem b_i que permite atingir a condição de equilíbrio).

1. (a) Valores próprios: $\lambda = 0$; vetores próprios associados: $X_0 = \alpha(1, 0, 0)$, $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$; não é diagonalizável: é uma matriz 3×3 que possui apenas um vetor próprio linearmente independente.
 (b) Valores próprios: $\lambda \in \{-2, 1, 3\}$; vetores próprios associados: $X_{-2} = \alpha(0, 0, 1)$, $X_1 = \alpha(6, 3, 8)$, $X_3 = \alpha(0, 5, 2)$, $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$; é diagonalizável: é uma matriz 3×3 com três valores próprios distintos; uma matriz diagonalizante e a correspondente matriz diagonal são, respetivamente,

$$\begin{bmatrix} 0 & 6 & 0 \\ 0 & 3 & 5 \\ 1 & 8 & 2 \end{bmatrix} \text{ e } \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}.$$

- (c) Valores próprios: $\lambda \in \{1, 3\}$; vetores próprios associados: $X_1 = \alpha(1, -2, 0, 0) + \beta(0, 0, -2, 1)$, $X_3 = \gamma(1, 0, 0, 0)$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ não simultaneamente nulos, $\gamma \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$; não é diagonalizável: é uma matriz 4×4 que possui no máximo três vetores próprios linearmente independentes.
 (d) Valores próprios: $\lambda \in \{1, 3\}$; vetores próprios associados: $X_1 = \alpha(-1, 0, 1)$, $X_3 = \alpha(5, 2, -3)$, $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$; não é diagonalizável: é uma matriz 3×3 que possui no máximo dois vetores próprios linearmente independentes.
 (e) Valores próprios: $\lambda \in \{2, 4\}$; vetores próprios associados: $X_2 = \alpha(1, 0, 0) + \beta(0, 1, -1)$, $X_4 = \gamma(-1, 1, 1)$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ não simultaneamente nulos, $\gamma \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$; é diagonalizável: é uma matriz 3×3 que possui três vetores próprios linearmente independentes; uma matriz diagonalizante e a correspondente matriz diagonal são, respetivamente,

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \text{ e } \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}.$$

- (f) Valores próprios: $\lambda \in \{-2, -1, 0\}$; vetores próprios associados: $X_{-2} = \alpha(1, 1, 2)$, $X_{-1} = \alpha(1, 0, 1)$, $X_0 = \alpha(1, 1, 1)$, $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$; é diagonalizável: é uma matriz 3×3 com três valores próprios distintos; uma matriz diagonalizante e a correspondente matriz diagonal são, respetivamente,

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{bmatrix} \text{ e } \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

2. (a) 1 é um valor próprio de A ; $U_1 = \langle(5, 4, -2)\rangle$. (b) A é diagonalizável e semelhante a $\begin{bmatrix} 1+\sqrt{5} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1-\sqrt{5} \end{bmatrix}$.

8. (a) Os valores próprios de A são 1, 2 e 4 e os subespaços próprios são $U_1 = \langle(-1, 1, 1)\rangle$, $U_2 = \langle(1, 0, 0)\rangle$ e $U_4 = \langle(7, -4, 2)\rangle$. (b) $P = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 7 \\ 1 & 0 & -4 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$; (c) $A^5 = \begin{bmatrix} 32 & -1147 & 1178 \\ 0 & 683 & -682 \\ 0 & -341 & 342 \end{bmatrix}$.

9. $a = b = 1$.

10. (a) $p_A(\lambda) = \lambda^2 - (k + 1)\lambda + k$ e os valores próprios são $\{1, k\}$. (b) $U_1 = \langle(x, -x)\rangle$ e, para $k \neq 1$, $U_k = \langle(x, -kx)\rangle$. (c) $k \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$. (d) $D = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & k \end{bmatrix}$ e $P = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -k \end{bmatrix}$. (e) A .

11. $\alpha = \beta = \gamma = \delta = \theta = \mu = 1$, $a = c = 0$ e $b = 1$.

12. (a) $p_A(\lambda) = \lambda^4 - \lambda^2$ e os valores próprios são $-1, 0$ e 1 . (b) Sim, sim.

14. (a) $P = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix}$ é uma matriz ortogonal tal que $P^T A P = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$.

- (b) $P = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{6}}{6} & \frac{\sqrt{3}}{3} \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{6}}{6} & \frac{\sqrt{3}}{3} \\ 0 & -\frac{\sqrt{6}}{3} & \frac{\sqrt{3}}{3} \end{bmatrix}$ é uma matriz ortogonal tal que $P^T A P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}$.

(c) $P = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix}$ é uma matriz ortogonal tal que $P^T A P = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$.

15. (b) $P = \begin{bmatrix} -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \end{bmatrix}$ é uma matriz ortogonal tal que $P^T A P = \begin{bmatrix} 9 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{bmatrix}$.

16. (a) $U_1 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : y = z\}$. (b) A é diagonalizável, pois A é simétrica e $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & -1 \end{bmatrix}$.

19. (a) $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$; (b) $p_A(\lambda) = \lambda^2 - \lambda - 1$, com valores próprios $\phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ (número áureo) e $-\frac{1}{\phi} = 1 - \phi = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$; (c) uma matriz diagonalizante é $P = \begin{bmatrix} 1 & -\phi \\ \phi & 1 \end{bmatrix}$ e a matriz diagonal correspondente $D = \begin{bmatrix} \phi & 0 \\ 0 & -\frac{1}{\phi} \end{bmatrix}$;
 (d) $x_k = [1 \ 0] V_k = [1 \ 0] A^k V_0 = [1 \ 0] P D^k P^{-1} V_0 = \frac{\phi^k - (-\frac{1}{\phi})^{-k}}{\sqrt{5}}$ (nota: $|P| = 1 + \phi^2 = \sqrt{5}\phi$), sendo $x_{22} = 17711$.