universidade de aveiro dmat
departamento de matemática

CÁLCULO II - Agrupamento 4

27 de junho de 2022

2.º Teste de Avaliação Discreta

Duração: 2h

A prova é composta por 5 questões. O formulário encontra-se no verso.
Justifique todas as respostas de forma clara e concisa.

---

1. [**30**] Determine e classifique os pontos críticos da função $f(x,y) = y^4 - y^2 - 2xy + x^2$.

2. [**20**] Determine o ponto $P(x,y,z)$ da superfície esférica $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ cuja soma das coordenadas é máxima.

3. [**60**] Resolva as seguinte equações diferenciais:

   (a) $y' = (1 + y^2)\cos t$;

   (b) $e^{-y}\,dx - (2y + xe^{-y})\,dy = 0$;

   (c) $x^2 y' + 2xy = y^3, \quad x > 0$.
   (Sugestão: efetue a mudança de variável $z = y^{-2}$)

4. [**70**] Considere o seguinte problema de valores iniciais (PVI):

$$y'' + 3y' + 2y = e^{-2t}, \quad y(0) = 0 = y'(0).$$

   (a) Determine a solução do PVI começando por resolver a equação diferencial.
   (Sugestão: use o método dos coeficientes indeterminados)

   (b) Resolva o mesmo PVI usando agora transformadas de Laplace.

5. [**20**] Considere a equação diferencial linear (de coeficientes variáveis)

$$x^2 y''(x) + ax\,y'(x) + b\,y(x) = x \ln x, \quad x > 0, \tag{1}$$

   onde a, b são duas constantes reais.
   Mostre que, dada uma qualquer solução $y(x)$ da equação (1), a função $z(t) = y(e^t)$ é solução da equação diferencial linear de coeficientes constantes

$$z''(t) + (a-1)z'(t) + bz(t) = t\,e^t, \quad t \in \mathbb{R}.$$

FORMULÁRIO

Algumas fórmulas de derivação

$(f\,g)' = f'g + f\,g'$	$\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - f\,g'}{g^2}$
$(k\,f)' = k\,f' \qquad (k \in \mathbb{R})$	$(f^\alpha)' = \alpha\, f^{\alpha-1} f' \qquad (\alpha \in \mathbb{R})$
$(a^f)' = f'\,a^f\,\ln a \qquad (a \in \mathbb{R}^+)$	$(\log_a f)' = \frac{f'}{f\,\ln a} \qquad (a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\})$
$(\operatorname{sen} f)' = f'\,\cos f$	$(\cos f)' = -f'\operatorname{sen} f$
$(\operatorname{tg} f)' = f'\,\sec^2 f = \frac{f'}{\cos^2 f}$	$(\operatorname{cotg} f)' = -f'\operatorname{cosec}^2 f = -\frac{f'}{\operatorname{sen}^2 f}$
$(\operatorname{arcsen} f)' = \frac{f'}{\sqrt{1-f^2}}$	$(\arccos f)' = -\frac{f'}{\sqrt{1-f^2}}$
$(\operatorname{arctg} f)' = \frac{f'}{1+f^2}$	$(\operatorname{arccotg} f)' = -\frac{f'}{1+f^2}$

Integração por partes: $\displaystyle\int f'g = f\,g - \int f\,g'$

Algumas transformadas de Laplace

$$F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\}(s), \quad s > s_f$$

função	transformada
$t^n \quad (n \in \mathbb{N}_0)$	$\dfrac{n!}{s^{n+1}}\,,\ s > 0$
$e^{at} \quad (a \in \mathbb{R})$	$\dfrac{1}{s-a}\,,\ s > a$
$\operatorname{sen}(at) \quad (a \in \mathbb{R})$	$\dfrac{a}{s^2+a^2}\,,\ s > 0$
$\cos(at) \quad (a \in \mathbb{R})$	$\dfrac{s}{s^2+a^2}\,,\ s > 0$
$\operatorname{senh}(at) \quad (a \in \mathbb{R})$	$\dfrac{a}{s^2-a^2}\,,\ s > \|a\|$
$\cosh(at) \quad (a \in \mathbb{R})$	$\dfrac{s}{s^2-a^2}\,,\ s > \|a\|$

função	transformada
$e^{\lambda t} f(t) \quad (\lambda \in \mathbb{R})$	$F(s-\lambda)$
$H_a(t) f(t-a) \quad (a > 0)$	$e^{-as}F(s)$
$f(at) \quad (a > 0)$	$\dfrac{1}{a}\,F\left(\dfrac{s}{a}\right)$
$t^n f(t) \quad (n \in \mathbb{N})$	$(-1)^n F^{(n)}(s)$
$f'(t) \quad (n \in \mathbb{N})$	$sF(s) - f(0)$
$f''(t) \quad (n \in \mathbb{N})$	$s^2F(s) - sf(0) - f'(0)$
$f^{(n)}(t) \quad (n \in \mathbb{N})$	$s^nF(s) - \displaystyle\sum_{k=1}^{n} s^{n-k} f^{(k-1)}(0)$