Departamento de Matemática da Universidade de Aveiro

Cálculo I - agr. 4 **2020/21**

2.º teste - turmas TP4B-2, TP4B-7 **Duração: 1h15**

- **Este teste termina com a palavra FIM e a indicação da cotação das questões.**
- **Todos os raciocínios devem ser convenientemente justificados e todas as respostas devem ser cuidadosamente redigidas.**

---

1. Calcula as primitivas das seguintes funções:

   (a) $\dfrac{\arctan(x)}{x^2}$; (b) $\dfrac{1}{x^2(1-x^2)}$; (c) $\dfrac{\sqrt[4]{x}+x}{\sqrt{x}}$.

   Sugestão: Na alínea (a) utiliza primitivação por partes e na alínea (c) faz uma mudança de variável.

2. Seja $\mathcal{A} := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq y \leq \sqrt{x^2 - x^4}\}$.

   (a) Determina os valores de x para os quais $\sqrt{x^2 - x^4}$ faz sentido.

   (b) Calcula os pontos de interseção dos gráficos de $y = 0$ e de $y = \sqrt{x^2 - x^4}$.
   Nota: Para efeitos da resolução das alíneas seguintes informa-se que as soluções são $(-1,0)$, $(0,0)$ e $(1,0)$, mas nenhuma cotação terás na presente alínea se apenas verificares que estes pontos satisfazem as duas equações.

   (c) Representa geometricamente a região $\mathcal{A}$.

   (d) Calcula a área da região $\mathcal{A}$.

3. Dados uma qualquer função f contínua em $\mathbb{R}$ e a um número real, designaremos por $I_a f$ o integral indefinido de f com origem no ponto a. Ou seja, $(I_a f)(x) := \int_a^x f(t)\,dt$, $\forall x \in \mathbb{R}$.

   (a) Determina $(I_a(I_a f))''(x)$ para cada $x \in \mathbb{R}$.

   (b) Utilizando o método da integração por partes, mostra que

   $$(I_a(I_a f))(x) = \int_a^x (x-u) f(u)\,du, \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

FIM

Cotação:

1\. 10; 2. 7; 3. 3.