Departamento de Matemática da Universidade de Aveiro

Matemática Discreta 2020/2021 - UC 47166 (1ºAno/2ºSem)

EXAME - **Exemplo de Resolução** **07/07/2021** - **Duração: 2h 30m**

Nome: **NMec:** **Curso:**

1. Sejam, A um conjunto e $\mathcal{R}$ uma relação binária definida em $\mathcal{P}(A)$ (conjuntos das partes de A) por

$$X \mathcal{R} Y \quad \text{se e só se} \quad X \cup \{3\} = Y \cup \{3\},$$

para quaisquer $X, Y \in \mathcal{P}(A)$.

[1.5] (a) Mostre que $\mathcal{R}$ é uma relação de equivalência.

[1.5] (b) Considere $A = \{1, 2, 3\}$. Determine $\mathcal{P}(A)/\mathcal{R}$.

1.(a)

Dado $X \in \mathcal{P}(A)$, verifica-se $X \cup \{3\} = X \cup \{3\}$, logo, para qualquer X, $X \mathcal{R} X$ e, portanto, $\mathcal{R}$ é reflexiva.

Dados $X, Y \in \mathcal{P}(A)$, tem-se que, se $X \cup \{3\} = Y \cup \{3\}$, então $Y \cup \{3\} = X \cup \{3\}$. Ou seja, se $X \mathcal{R} Y$, então $Y \mathcal{R} X$. Logo, $\mathcal{R}$ é simétrica.

Dados $X, Y, Z \in \mathcal{P}(A)$, tais que $X\mathcal{R}Y$ e $Y\mathcal{R}Z$, tem-se que $X \cup \{3\} = Y \cup \{3\}$ e $Y \cup \{3\} = Z \cup \{3\}$. Consequentemente, $X \cup \{3\} = Z \cup \{3\}$. Logo, para quaisquer $X, Y, Z \in \mathcal{P}(A)$, se $X\mathcal{R}Y$ e $Y\mathcal{R}Z$, então $X\mathcal{R}Z$, ou seja, $\mathcal{R}$ é transitiva.

1.(b)

Com $A = \{1, 2, 3\}$, tem-se $\mathcal{P}(A) = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}, \{1, 2, 3\}\}$.

Para determinar o conjunto quociente, $\mathcal{P}(A)/\mathcal{R}$, ou seja, o conjunto de todas as classes de equivalência, é necessário obter cada classe de equivalência $[X]_{\mathcal{R}}$, para qualquer $X \in \mathcal{P}(A)$.

Por definição,

$$\begin{aligned} [X]_{\mathcal{R}} &= \{Y \in \mathcal{P}(A) \mid X\mathcal{R}Y\} \\ &= \{Y \in \mathcal{P}(A) \mid X \cup \{3\} = Y \cup \{3\}\} . \end{aligned}$$

Ora, tem-se que $\emptyset \cup \{3\} = \{3\} = \{3\} \cup \{3\}$, donde $[\emptyset]_{\mathcal{R}} = [\{3\}]_{\mathcal{R}}$.

Como $\{1\} \cup \{3\} = \{1, 3\} = \{1, 3\} \cup \{3\}$, então $[\{1\}]_{\mathcal{R}} = [\{1, 3\}]_{\mathcal{R}}$.

E $\{2\} \cup \{3\} = \{2, 3\} = \{2, 3\} \cup \{3\}$, pelo que $[\{2\}]_{\mathcal{R}} = [\{2, 3\}]_{\mathcal{R}}$.

Atendendo a que $\{1, 2\} \cup \{3\} = \{1, 2, 3\} = \{1, 2, 3\} \cup \{3\}$, vem $[\{1, 2\}]_{\mathcal{R}} = [\{1, 2, 3\}]_{\mathcal{R}}$.

Assim,

$$\begin{aligned} \mathcal{P}(A)/\mathcal{R} &= \{[\emptyset]_{\mathcal{R}}, [\{1\}]_{\mathcal{R}}, [\{2\}]_{\mathcal{R}}, [\{1, 2\}]_{\mathcal{R}}\} \\ &= \{\{\emptyset, \{3\}\}, \{\{1\}, \{1, 3\}\}, \{\{2\}, \{2, 3\}\}, \{\{1, 2\}, \{1, 2, 3\}\}\} . \end{aligned}$$

2. Admita que o universo do discurso é o conjunto de todas as pessoas. Sejam x, y, z, símbolos de variáveis e considere definidos os seguintes predicados:

   - $B(x) \equiv$ "x é um barbeiro";
   - $S(x, y) \equiv$ "x barbeia y";

[1.5] (a) Usando os predicados definidos exprima na lógica de primeira ordem (LPO) as afirmações:

i. Todo o barbeiro faz a barba de todas as pessoas que não se barbeiam.

$$\forall x \ \ (B(x) \Rightarrow \forall y \ \ (\neg S(y, y) \Rightarrow S(x, y)))$$

ii. Nenhum barbeiro faz a barba de uma pessoa que se barbeia a si própria.

$$\neg \exists x \ \ (B(x) \wedge \exists y \ \ (S(y, y) \wedge S(x, y)))$$

[2.5] (b) Na LPO considere que são válidas as seguintes fórmulas:

F1: $\forall x \ \forall y \ (S(x, y) \Rightarrow S(y, x))$,

F2: $\forall x \ \forall y \ \forall \ z \ ((S(x, y) \wedge S(y, z)) \Rightarrow S(x, z))$,

F3: $\forall x \ \exists y \ S(x, y)$,

T: $\forall x \ S(x, x)$.

Usando o princípio da resolução mostre que **T** é consequência lógica de **F1**, **F2** e **F3**.

Para mostrar que **T** é consequência lógica de **F1**, **F2** e **F3**, vamos mostrar que

$$\neg ((\mathbf{F1} \wedge \mathbf{F2} \wedge \mathbf{F3}) \Rightarrow \mathbf{T}) \equiv \mathbf{F1} \wedge \mathbf{F2} \wedge \mathbf{F3} \wedge \neg \mathbf{T}$$

é uma contradição, ou seja, que o conjunto de fórmulas

$$\{\mathbf{F1}, \mathbf{F2}, \mathbf{F3}, \neg \mathbf{T}\}$$

é inconsistente.

Ora,

$$\neg \mathbf{T} \equiv \exists x \ \neg S(x, x).$$

Temos de transformar todas as fórmulas na forma normal de Skolem.

A fórmula **F1** é equivalente a

$$\forall x \ \forall y \ (\neg S(x, y) \vee S(y, x)),$$

e de **F2** tem-se

$$\forall x \ \forall y \ \forall \ z \ (\neg S(x, y) \vee \neg S(y, z) \vee S(x, z)).$$

Introduzindo um símbolo de função f de um argumento, a partir de **F3** obtém-se

$$\forall x \ S(x, f(x)).$$

Finalmente, introduzindo uma constante c, a partir de $\neg \mathbf{T}$ tem-se

$$\neg S(c, c).$$

Assim, renomeando os símbolos de variáveis, obtêm-se as cláusulas

$$\underbrace{\neg S(x,y) \vee S(y,x)}_{C_1}, \quad \underbrace{\neg S(u,v) \vee \neg S(v,w) \vee S(u,w)}_{C_2}, \quad \underbrace{S(z,f(z))}_{C_3}, \quad \underbrace{\neg S(c,c)}_{C_4}.$$

Um unificador mais geral (u.m.g.) de $\{S(x,y), S(z,f(z))\}$ é a substituição $\sigma_1 = \{z/x, f(z)/y\}$,

e a resolvente binária das cláusulas $C_1\sigma_1$ e C_3 é a cláusula C_5:

$$\begin{array}{rc} C_1\sigma_1: & \neg S(z,f(z)) \vee S(f(z),z) \\ C_3: & S(z,f(z)) \\ \hline C_5: & S(f(z),z) \end{array}$$

Um u.m.g. de $\{S(u,v), S(z,f(z))\}$ é a substituição $\sigma_2 = \{z/u, f(z)/v\}$,

e a resolvente binária das cláusulas $C_2\sigma_2$ e C_3 é a cláusula C_6:

$$\begin{array}{rc} C_2\sigma_2: & \neg S(z,f(z)) \vee \neg S(f(z),w) \vee S(z,w) \\ C_3: & S(z,f(z)) \\ \hline C_6: & \neg S(f(z),w) \vee S(z,w) \end{array}$$

Um u.m.g. de $\{S(f(z),z), S(f(z),w)\}$ é a substituição $\sigma_3 = \{z/w\}$,

e a resolvente binária das cláusulas C_5 e $C_6\sigma_3$ é a cláusula C_7:

$$\begin{array}{rc} C_5: & S(f(z),z) \\ C_6\sigma_3: & \neg S(f(z),z) \vee S(z,z) \\ \hline C_7: & S(z,z) \end{array}$$

Finalmente, um u.m.g. de $\{S(z,z), S(c,c)\}$ é a substituição $\sigma_4 = \{c/z\}$,

e a resolvente binária das cláusulas $C_7\sigma_4$ e C_4 é a cláusula vazia $\Diamond$ (=falso):

$$\begin{array}{rc} C_7\sigma_4: & S(c,c) \\ C_4: & \neg S(c,c) \\ \hline & \Diamond \end{array}$$

Donde, provamos que o conjunto de cláusulas $S = \{C_1, C_2, C_3, C_4\}$ é inconsistente, isto é, que

$$\mathbf{F1} \wedge \mathbf{F2} \wedge \mathbf{F3} \wedge \neg\mathbf{T}$$

é uma contradição.

Logo,

$$(\mathbf{F1} \wedge \mathbf{F2} \wedge \mathbf{F3}) \Rightarrow \mathbf{T}$$

é uma tautologia, ou seja, **T** é consequência lógica de **F1**, **F2** e **F3**.

Formulário: $\sum_{n=0}^{\infty} \alpha^n x^n = \frac{1}{1-\alpha x}$, $\sum_{n=0}^{\infty} \binom{n+m-1}{n} \alpha^n x^n = \frac{1}{(1-\alpha x)^m}$.

[2.5] 3. De quantas maneiras se podem colocar 15 bolas iguais em 5 caixas, de modo que fique pelo menos uma bola na primeira caixa e no máximo 3 na segunda caixa, não havendo restrições nas restantes caixas? Justifique devidamente.

A solução do problema é dada pelo coeficiente de $x^i\ x^j\ x^k\ x^l\ x^m$, com $i = 1, 2, 3, \ldots, 15$ (possibilidades para o número de bolas na primeira caixa), $j = 0, 1, 2, 3$ (possibilidades para o número de bolas na segunda caixa), $k, l, m = 0, 1, 2, 3, \ldots, 14$ (possibilidades para o número de bolas nas restantes caixas), tal que, $i + j + k + l + m = 15$, no desenvolvimento em série de potências de x da função geradora $\mathcal{F}(x)$:

$$\mathcal{F}(x) = \left(x + x^2 + \ldots + x^{15}\right) \left(1 + x + x^2 + x^3\right) \left(1 + x + x^2 + \ldots + x^{14}\right)^3$$

Ou seja, pretende-se determinar o coeficiente de x^{15} em $\mathcal{F}(x)$:

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}(x) &= \frac{x\left(1-x^{15}\right)}{1-x} \frac{1-x^4}{1-x} \left(\frac{1-x^{15}}{1-x}\right)^3 \\
&= \left(x - x^5\right) \frac{1}{(1-x)^5} \left(1-x^{15}\right)^4 \\
&= \left(x - x^5\right) \sum_{n=0}^{\infty} \binom{n+5-1}{n} x^n \sum_{k=0}^{4} \binom{4}{k} 1^{4-k} \left(-x^{15}\right)^k \\
&= \left(x - x^5\right) \sum_{n=0}^{\infty} \binom{n+4}{4} x^n \left(1 + \sum_{k=1}^{4} \binom{4}{k} 1^{4-k} \left(-x^{15}\right)^k\right) \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \binom{n+4}{4} x^{n+1} - \sum_{n=0}^{\infty} \binom{n+4}{4} x^{n+5} + \ldots \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} \binom{n+3}{4} x^n - \sum_{n=5}^{\infty} \binom{n-1}{4} x^n + \ldots
\end{aligned}$$

Ora, com $n = 15$ tem-se o coeficiente de x^{15} em $\mathcal{F}(x)$:

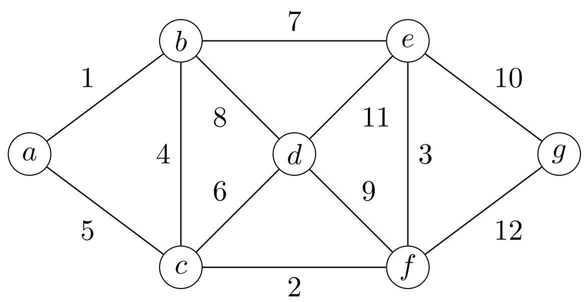
$$\mathcal{F}(x) = \ldots + \left[\binom{18}{4} - \binom{14}{4}\right] x^{15} + \ldots$$

Logo, a resposta é

$$\binom{18}{4} - \binom{14}{4} .$$

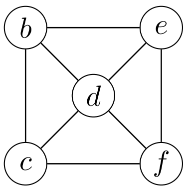
4. Considere o grafo $G = (V, E, W))$ com custos nas arestas representado na figura seguinte:

(sendo a matriz de custos, $W = (w_{ij})$, com $i, j \in V,\ ij \in E$)



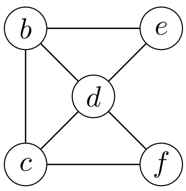
[1.0] (a) Designando por α a aresta ef de G, determine $G\left[\{b, c, d, e, f\}\right] - \alpha$ e $G\left[\{b, c, d, e, f\}\right] //\alpha$.

O subgrafo induzido pelo conjunto de vértices $\{b, c, d, e, f\}$, $G\left[\{b, c, d, e, f\}\right]$ é



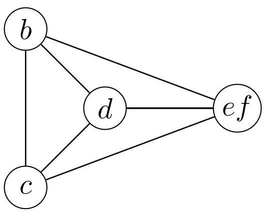
.

O grafo $G\left[\{b, c, d, e, f\}\right] - \alpha$ é



.

O grafo $G\left[\{b, c, d, e, f\}\right] //\alpha$ é

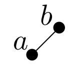
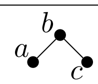
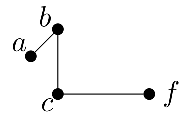
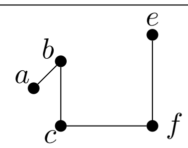
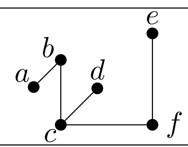
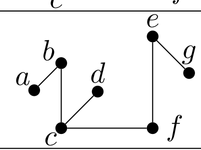


.

[3.5] (b) Aplicando o algoritmo de Prim, determine uma árvore abrangente de custo mínimo, T, para G. Notando, (ij, w_{ij}) cada par $(aresta, custo)$, $e^* = i^*j^*$ a aresta de menor custo, Árvore T o desenho da árvore de custo mínimo obtida em cada Iteração, utilize uma tabela adequada com o cabeçalho:

| Iteração | Vértices V' | Arestas E' | $(ij, w_{ij})\,, i \in V', j \in V \setminus V'$ | $e^* = i^*j^*$ | Árvore $T = (V', E')$ |

Escolhemos o vértice a para começar o algoritmo:

Iteração	Vértices V'	Arestas E'	(ij, w_{ij}), $i \in V', j \in V \setminus V'$	$e^* = i^*j^*$	Árvore $T = (V', E')$
1	$\{a\}$	$\emptyset$	$(ab, 1)\,(ac, 5)$	ab	
2	$\{a, b\}$	$\{ab\}$	$(ac, 5)\,(bc, 4)$ $(bd, 8)\,(be, 7)$	bc	
3	$\{a, b, c\}$	$\{ab, bc\}$	$(bd, 8)\,(be, 7)$ $(cd, 6)\,(cf, 2)$	cf	
4	$\{a, b, c, f\}$	$\{ab, bc,$ $cf\}$	$(bd, 8)\,(be, 7)$ $(cd, 6)\,(fd, 9)$ $(fe, 3)\,(fg, 12)$	fe	
5	$\{a, b, c, e, f\}$	$\{ab, bc,$ $cf, fe\}$	$(bd, 8)\,(ed, 11)$ $(cd, 6)\,(fd, 9)$ $(eg, 10)\,(fg, 12)$	cd	
6	$\{a, b, c,$ $d, e, f\}$	$\{ab, bc, cf,$ $fe, cd\}$	$(eg, 10)\,(fg, 12)$	eg	
7	$\{a, b, c,$ $d, e, f, g\}$	$\{ab, bc, cf,$ $fe, cd, eg\}$	STOP! $V' = V$		

A árvore abrangente de custo mínimo é $T = G[E'] = G[\{ab, bc, cf, fe, cd, eg\}]$,
com custo total $1 + 4 + 2 + 3 + 6 + 10 = 26$.