universidade de aveiro dmat
departamento de matemática

CÁLCULO II - Agrupamento 4 13 de maio de 2022

1.º Teste de Avaliação Discreta Duração: 2h

Este teste é composto por 5 (cinco) questões. O formulário encontra-se no verso.
Justifique todas as respostas de forma clara e concisa.

---

1. [**55**] Considere a série de potências $f(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{(n+1)\,2^{n+1}}\,(x-1)^{n+1}$.

   (a) Determine o raio de convergência da série.

   (b) Justifique detalhadamente que $f'(x) = -\dfrac{1}{1+x}$ no respetivo intervalo de convergência.

   (c) Qual é a expressão de $f(x)$?

2. [**45**] Considere a função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, 2π-periódica, tal que $f(x) = |\text{sen}\, x|$ para $x \in [-\pi, \pi]$.

   (a) Justifique (sem a calcular) que a série de Fourier de f é da forma

   $$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(nx), \quad \text{com } a_n \in \mathbb{R},\ n \in \mathbb{N}_0,$$

   e calcule <u>os coeficientes a_0 e a_1</u> que figuram nesta série.

   (b) Sabendo agora que a série de Fourier de f é

   $$\frac{2}{\pi} - \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(2nx)}{(2n)^2 - 1},$$

   mostre que esta série é uniformemente convergente em $\mathbb{R}$ para a própria função f.

   (c) Atendendo à alínea anterior, calcule a soma das séries numéricas

   $$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n)^2 - 1} \quad \text{e} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)^2 - 1}.$$

3. [**35**] Considere a função f definida por $f(x) = \ln(2-x)$, com $x < 2$.

   (a) Determine o polinómio de Taylor de ordem 3 da função f no ponto $c = 1$.

   (b) Usando o polinómio da alínea anterior, calcule um valor aproximado de $\ln(1,5)$ e mostre que o erro absoluto cometido nessa aproximação é inferior a $0,02$.

(continua)

4. **[50]** Considere a função $f : D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ dada por

$$f(x,y) = \ln(x^2 + y^2 - a^2), \qquad \text{onde } a \text{ é um parâmetro real positivo.}$$

(a) Determine o domínio D de f e represente-o geometricamente.

(b) Calcule o vetor gradiente $\nabla f(a,a)$.

(c) Considerando agora $a = 1$, determine uma equação do plano tangente ao gráfico de f no ponto $(1,1,0)$.

5. **[15]** Considere uma série de potências $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n\, x^n$ com raio de convergência $R > 0$.

Indique, justificando:

(i) um intervalo onde a série é uniformemente convergente;

(ii) a natureza da série $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{R^n |a_n|}{2^n}$;

(iii) o raio de convergência da série $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} n\, a_n\, x^{n-1}$.

FORMULÁRIO

Algumas fórmulas de derivação

$(f\,g)' = f'g + f\,g'$	$\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - f\,g'}{g^2}$
$(k\,f)' = k\,f' \qquad (k \in \mathbb{R})$	$(f^\alpha)' = \alpha\, f^{\alpha-1} f' \qquad (\alpha \in \mathbb{R})$
$(a^f)' = f'\, a^f\, \ln a \qquad (a \in \mathbb{R}^+)$	$(\log_a f)' = \frac{f'}{f\, \ln a} \qquad (a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\})$
$(\operatorname{sen} f)' = f' \cos f$	$(\cos f)' = -f' \operatorname{sen} f$
$(\operatorname{tg} f)' = f' \sec^2 f = \frac{f'}{\cos^2 f}$	$(\operatorname{cotg} f)' = -f' \operatorname{cosec}^2 f = -\frac{f'}{\operatorname{sen}^2 f}$
$(\operatorname{arcsen} f)' = \frac{f'}{\sqrt{1-f^2}}$	$(\arccos f)' = -\frac{f'}{\sqrt{1-f^2}}$
$(\operatorname{arctg} f)' = \frac{f'}{1+f^2}$	$(\operatorname{arccotg} f)' = -\frac{f'}{1+f^2}$

Fórmula de integração por partes: $\displaystyle\int f'g = f\,g - \int f\,g'$

Alguns desenvolvimentos em série de MacLaurin

- $\displaystyle\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n = 1 + x + x^2 + \cdots + x^n + \cdots, \quad x \in]-1,1[$
- $\displaystyle e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \cdots, \quad x \in \mathbb{R}$
- $\displaystyle\operatorname{sen} x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} = x - \frac{x^3}{3!} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \cdots, \quad x \in \mathbb{R}$
- $\displaystyle\cos x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} = 1 - \frac{x^2}{2!} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + \cdots, \quad x \in \mathbb{R}.$