

- Esta 2.^a parte termina com a palavra FIM e a indicação da cotação das questões.
- Todos os raciocínios devem ser convenientemente justificados e todas as respostas devem ser cuidadosamente redigidas.

1. Seja \mathcal{A} a região do semiplano $x \geq 0$ delimitada pelos gráficos das funções $y = \sin x$ e $y = \cos(2x)$ para $0 \leq x \leq \pi/2$.

(a) Calcula os pontos de interseção dos gráficos de $y = \sin x$ e de $y = \cos(2x)$. Sugestão: Recorda a fórmula $\cos \theta = \sin(\frac{\pi}{2} - \theta)$, $\theta \in \mathbb{R}$.

Nota: Para efeitos da resolução das alíneas seguintes informa-se que a solução é $(\frac{\pi}{6}, \frac{1}{2})$, mas nenhuma cotação terá na presente alínea se apenas verificares que estes pontos satisfazem as duas equações.

(b) Representa geometricamente a região \mathcal{A} .

(c) Calcula a área da região \mathcal{A} .

2. Considera o seguinte integral impróprio de 1.^a espécie:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx, \text{ onde } f(x) := \begin{cases} \frac{1}{x} & \text{se } x < -1 \\ e^{x^2} & \text{se } x \geq -1 \end{cases}.$$

Determina a sua natureza e, no caso de ser convergente, calcula o seu valor.

3. (a) Estuda a natureza das seguintes séries numéricas. Em caso de convergência indica se

é simples ou absoluta. (i) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+2}{n^2 + \sqrt{n} + 1}$; (ii) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^2(-2)^{-n}}{e^n}$.

(b) Determina a soma da seguinte série numérica convergente:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{6}{(6n-3)(6n+3)}.$$

FIM

Cotação:

1. 3; 2. 1; 3. 6.