Departamento de Matemática da Universidade de Aveiro

Matemática Discreta 2020/2021 - UC 47166 (1ºAno/2ºSem)

EXAME (Avaliação FINAL) **07/07/2021 - Duração: 2h 30m**

Nome: **NMec:** **Curso:**

1. Sejam, A um conjunto e $\mathcal{R}$ uma relação binária definida em $\mathcal{P}(A)$ (conjuntos das partes de A) por

$$X \; \mathcal{R} \; Y \quad \text{se e só se} \quad X \cup \{3\} = Y \cup \{3\},$$

para quaisquer $X, Y \in \mathcal{P}(A)$.

[1.5] (a) Mostre que $\mathcal{R}$ é uma relação de equivalência.

[1.5] (b) Considere $A = \{1, 2, 3\}$. Determine $\mathcal{P}(A)/\mathcal{R}$.

2. Admita que o universo do discurso é o conjunto de todas as pessoas. Sejam x, y, z, símbolos de variáveis e considere definidos os seguintes predicados:

   - $B(x) \equiv$ "x é um barbeiro";
   - $S(x, y) \equiv$ "x barbeia y";

[1.5] (a) Usando os predicados definidos exprima na lógica de primeira ordem (LPO) as afirmações:

   i. Todo o barbeiro faz a barba de todas as pessoas que não se barbeiam.
   ii. Nenhum barbeiro faz a barba de uma pessoa que se barbeia a si própria.

[2.5] (b) Na LPO considere que são válidas as seguintes fórmulas:

F1: $\forall x\ \forall y\ (S(x, y) \Rightarrow S(y, x))$,

F2: $\forall x\ \forall y\ \forall\ z\ ((S(x, y) \wedge S(y, z)) \Rightarrow S(x, z))$,

F3: $\forall x\ \exists y\ S(x, y)$,

T: $\forall x\ S(x, x)$.

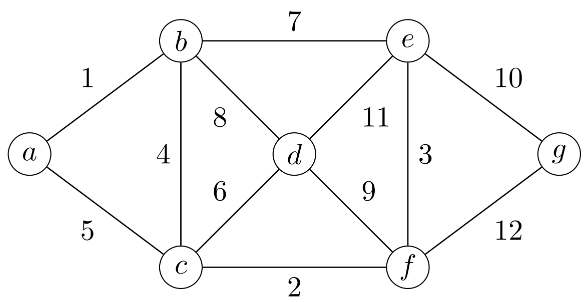
Usando o princípio da resolução mostre que **T** é consequência lógica de **F1**, **F2** e **F3**.

Formulário: $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \alpha^n x^n = \frac{1}{1-\alpha x}$, $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \binom{n+m-1}{n} \alpha^n x^n = \frac{1}{(1-\alpha x)^m}$.

[2.5] 3. De quantas maneiras se podem colocar 15 bolas iguais em 5 caixas, de modo que fique pelo menos uma bola na primeira caixa e no máximo 3 na segunda caixa, não havendo restrições nas restantes caixas? Justifique devidamente.

4. Considere o grafo $G = (V, E, W))$ com custos nas arestas representado na figura seguinte:

(sendo a matriz de custos, $W = (w_{ij})$, com $i, j \in V,\ ij \in E$)



[1.0] (a) Designando por α a aresta ef de G, determine $G\left[\{b, c, d, e, f\}\right] - \alpha$ e $G\left[\{b, c, d, e, f\}\right] // \alpha$.

[3.5] (b) Aplicando o algoritmo de Prim, determine uma árvore abrangente de custo mínimo, T, para G. Notando, (ij, w_{ij}) cada par $(aresta, custo)$, $e^* = i^*j^*$ a aresta de menor custo, Árvore T o desenho da árvore de custo mínimo obtida em cada Iteração, utilize uma tabela adequada com o cabeçalho:

Iteração	Vértices V'	Arestas E'	$(ij, w_{ij})\,, i \in V', j \in V \setminus V'$	$e^* = i^*j^*$	Árvore $T = (V', E')$