Departamento de Matemática da Universidade de Aveiro

Matemática Discreta 2020/2021 - UC 47166 (1ºAno/2ºSem)

Teste T2 - QUESTÃO 3 Exemplo de Resolução - 28/05/2021

TURNO 1/QUESTÃO 3.

3.(a) Sabendo que o número de subconjuntos de $[n] = \{1, 2, \ldots, n\}$ que têm cardinalidade 2 é igual 15, determine $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}$.

O número de subconjuntos de $[n]$ que têm cardinalidade 2 é dado por

$$\binom{n}{2} = \frac{n!}{(n-2)!2!} = \frac{n(n-1)}{2}.$$

Logo,

$$\frac{n(n-1)}{2} = 15 \Leftrightarrow n(n-1) = 30 \Leftrightarrow n = 6.$$

Uma vez que

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 1^k 1^{n-k} = (1+1)^n = 2^n,$$

temos que

$$2^n = 2^6 = 64, \quad \text{pelo que,} \quad \sum_{k=0}^{6} \binom{6}{k} = 64.$$

.

3.(b) Tendo em conta que, existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $x^3y^8z^5$ é um termo no desenvolvimento multinomial de $(xy - xyz + yz)^n$, determine o coeficiente associado a $x^3y^8z^5$.

Pela fórmula multinomial,

$$\begin{aligned}(xy - xyz + yz)^n &= \sum_{t_1+t_2+t_3=n} \binom{n}{t_1, t_2, t_3} (xy)^{t_1} \, (-xyz)^{t_2} \, (yz)^{t_3} \\ &= \sum_{t_1+t_2+t_3=n} (-1)^{t_2} \binom{n}{t_1, t_2, t_3} \, x^{t_1+t_2} \, y^{t_1+t_2+t_3} \, z^{t_2+t_3}\end{aligned}$$

Assim,

$$\begin{cases} t_1 + t_2 = 3 \\ t_1 + t_2 + t_3 = 8 \\ t_2 + t_3 = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t_1 = 3 \\ t_2 = 0 \\ t_3 = 5 \end{cases}.$$

Logo,

$n = t_1 + t_2 + t_3 = 8$

e o coeficiente do termo $x^3y^8z^5$ é dado por

$(-1)^0 \binom{8}{3, 0, 5} = \frac{8!}{3!0!5!}$.

TURNO 2/QUESTÃO 3.

3.(a) Sabendo que

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 256,$$

determine o número de subconjuntos de $[n] = \{1, 2, \ldots, n\}$ que têm cardinalidade 2.

Uma vez que

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 1^k 1^{n-k} = (1+1)^n = 2^n,$$

temos que

$$2^n = 256 \;\Leftrightarrow\; n = 8.$$

O número de subconjuntos de $[n]$ que têm cardinalidade 2 é dado por

$$\binom{n}{2} = \binom{8}{2} = \frac{8!}{6!2!} = 28.$$

3.(b) Tendo em conta que, existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $x^3y^8z^5$ é um termo no desenvolvimento multinomial de $(xy + xyz - yz)^n$, determine o coeficiente associado a $x^3y^8z^5$.

Pela fórmula multinomial,

$$\begin{aligned}(xy + xyz - yz)^n &= \sum_{t_1+t_2+t_3=n} \binom{n}{t_1, t_2, t_3} (xy)^{t_1}\ (xyz)^{t_2}\ (-yz)^{t_3} \\ &= \sum_{t_1+t_2+t_3=n} (-1)^{t_3} \binom{n}{t_1, t_2, t_3} x^{t_1+t_2}\ y^{t_1+t_2+t_3}\ z^{t_2+t_3}\end{aligned}$$

Assim,

$$\begin{cases} t_1 + t_2 = 3 \\ t_1 + t_2 + t_3 = 8 \\ t_2 + t_3 = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t_1 = 3 \\ t_2 = 0 \\ t_3 = 5 \end{cases}.$$

Logo,

$n = t_1 + t_2 + t_3 = 8$

e o coeficiente do termo $x^3y^8z^5$ é dado por

$(-1)^5 \binom{8}{3, 0, 5} = -\frac{8!}{3!0!5!}.$