Departamento de Matemática da Universidade de Aveiro

Cálculo I - agr. 4 **2020/21**

2.º teste - turma TP4A-6 Duração: 1h15

- **Este teste termina com a palavra FIM e a indicação da cotação das questões.**
- **Todos os raciocínios devem ser convenientemente justificados e todas as respostas devem ser cuidadosamente redigidas.**

---

1. Calcula as primitivas das seguintes funções:

   (a) $\ln(x^2+1)$; (b) $\dfrac{x-4}{x^2+x-2}$; (c) $\dfrac{x^2}{\sqrt{4-x^2}}$.

   Sugestão: Na alínea (a) utiliza primitivação por partes e na alínea (c) faz uma substituição trigonométrica $x = a\sin t$, $t \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$, para um valor de a conveniente.

2. Seja $\mathcal{A} := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \ y \geq 0, \ y \leq 2x, \ y \leq \frac{2}{\sqrt{x}}, \ 0 \leq x \leq 4\}$.

   (a) Calcula os pontos de interseção dos gráficos de $y = 2x$ e de $y = \frac{2}{\sqrt{x}}$.
   Nota: Para efeitos da resolução das alíneas seguintes informa-se que a solução é $(1,2)$, mas nenhuma cotação terás na presente alínea se apenas verificares que este ponto satisfaz as duas equações.

   (b) Representa geometricamente a região $\mathcal{A}$.

   (c) Calcula a área da região $\mathcal{A}$.

3. (a) Define, para $a < b$ e $n \in \mathbb{N}$, soma de Riemann $S(f, P_n, C_n)$ de uma função $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ associada a uma partição P_n de $[a,b]$ e a uma sequência C_n compatível com P_n.

   (b) Considera agora a função $f : [0,\,1] \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x}, & \text{se x} > 0 \\ 0, & \text{se x} = 0 \end{cases}$ e prova, a partir da definição de integral de Riemann, que f não é integrável.

   Sugestão: Podes, por exemplo, considerar as partições $0 < \frac{1}{n} < \frac{2}{n} < \ldots < \frac{n-1}{n} < 1$ do intervalo $[0,\,1]$ e escolher as sequências compatíveis de modo a que as somas de Riemann correspondentes divirjam para infinito quando $n \to \infty$; se precisares, podes tirar partido do facto de $\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i}$ ser infinito.

FIM

Cotação:

1. 10; 2. 7; 3. 3.