Departamento de Matemática da Universidade de Aveiro

Matemática Discreta 2020/2021 - UC 47166 (1ºAno/2ºSem)

Teste T2 - QUESTÕES1-2 Exemplo de Resolução - 28/05/2021

TURNO 1/QUESTÃO 1. Usando indução matemática pretende-se provar que é verdadeira a proposição

$$\forall n \in \mathbb{N}\ \exists m \in \mathbb{N}\ \ 3^{2n} - 2^n = 7m.$$

Como condição inicial, tem-se que, a proposição é verdadeira para $n = 1$, ou seja,

$$3^2 - 2 = 7, \text{ pelo que, } 9 - 2 = 7m, \text{ com } m = 1.$$

Por hipótese de indução (HI), vamos assumir que a proposição é verdadeira para $n = k$,

$$\exists m_k \in \mathbb{N}\ \ 3^{2k} - 2^k = 7m_k.$$

Admitindo que a proposição é verdadeira para $n = k$ prova-se que também é verdadeira para $n = (k+1) \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned}
3^{2(k+1)} - 2^{(k+1)} &= 3^{(2k+2)} - 2^{(k+1)} \\
&= 3^2 \times 3^{2k} - 2 \times 2^k \\
&= 9 \times \left(3^{2k} - 2^k\right) + 7 \times 2^k \\
&= 9 \times 7m_k + 7 \times 2^k, \quad \text{por (HI)} \\
&= 7\left(9m_k + 2^k\right) \\
&= 7p, \quad \text{com} \quad p = \left(9m_k + 2^k\right) \in \mathbb{N}.
\end{aligned}$$

Logo, também $3^{2(k+1)} - 2^{(k+1)}$ é divisível por 7 e, portanto, é verdadeira a proposição: $\forall n \in \mathbb{N}\ \exists m \in \mathbb{N}\ \ 3^{2n} - 2^n = 7m$.

TURNO 2/QUESTÃO 1. Usando indução matemática pretende-se provar que é verdadeira a proposição

$$\forall n \in \mathbb{N}\ \exists m \in \mathbb{N}\ \ 4^{2n} - 8^n = 8m.$$

Como condição inicial, tem-se que, a proposição é verdadeira para $n = 1$, ou seja,

$$4^2 - 8 = 8, \text{ pelo que, } 16 - 8 = 8m, \text{ com } m = 1.$$

Por hipótese de indução (HI), vamos assumir que a proposição é verdadeira para $n = k$,

$$\exists m_k \in \mathbb{N}\ \ 4^{2k} - 8^k = 8m_k.$$

Admitindo que a proposição é verdadeira para $n = k$ prova-se que também é verdadeira para $n = (k+1) \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned}
4^{2(k+1)} - 8^{(k+1)} &= 4^{(2k+2)} - 8^{(k+1)} \\
&= 4^2 \times 4^{2k} - 8 \times 8^k \\
&= 16 \times \left(4^{2k} - 8^k\right) + 8 \times 8^k \\
&= 16 \times 8m_k + 8 \times 8^k, \quad \text{por (HI)} \\
&= 8\left(16m_k + 8^k\right) \\
&= 8p, \quad \text{com} \quad p = \left(16m_k + 8^k\right) \in \mathbb{N}.
\end{aligned}$$

Logo, também $4^{2(k+1)} - 8^{(k+1)}$ é divisível por 8 e, portanto, é verdadeira a proposição: $\forall n \in \mathbb{N}\ \exists m \in \mathbb{N}\ \ 4^{2n} - 8^n = 8m$.

TURNO 1/QUESTÃO 2. Estabeleça uma bijeção entre o conjunto

$$A = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{N}^3 \mid x_1 + x_2 + x_3 = 15,\ x_1 \geq 1,\ x_2 \geq 2,\ x_3 \geq 3\}$$

e o conjunto de sequências binárias de 9 uns e 2 zeros. Quantos elementos tem A? Justifique devidamente.

A cada triplo (x_1, x_2, x_3) associamos a sequência

$$(\underbrace{1, 1, \ldots, 1}_{x_1-1}, 0, \underbrace{1, 1, \ldots, 1}_{x_2-2}, 0, \underbrace{1, 1, \ldots, 1}_{x_3-3})$$

de $15 - 6 = 9$ uns e 2 zeros. Por outro lado, a cada sequência

$$(\underbrace{1, 1, \ldots, 1}_{a_1}, 0, \underbrace{1, 1, \ldots, 1}_{a_2}, 0, \underbrace{1, 1, \ldots, 1}_{a_3})$$

de 9 uns e 2 zeros associamos o triplo $(1 + a_1, 2 + a_2, 3 + a_3) \in A$. Estas duas associações (correspondências) são inversas entre si obtendo-se, portanto, uma bijeção.
Donde, o número de elementos de A é igual ao número de sequências binárias de comprimento 11 com 9 uns e 2 zeros, o qual coincide com o número de possibilidades de escolha das posições para os 2 zeros (ou para os 9 uns) de entre as 11 possíveis, ou seja, $\binom{11}{2} = \binom{11}{9} = \frac{11!}{9!\ 2!} = \frac{11 \times 10}{2} = 55$.

TURNO 2/QUESTÃO 2. Estabeleça uma bijeção entre o conjunto

$$A = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{N}^4 \mid x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 30,\ x_1 \geq 2,\ x_2 \geq 4,\ x_3 \geq 6,\ x_4 \geq 8\}$$

e o conjunto de sequências binárias de 10 uns e 3 zeros. Quantos elementos tem A? Justifique devidamente.

A cada quádruplo (x_1, x_2, x_3, x_4) associamos a sequência

$$(\underbrace{1, 1, \ldots, 1}_{x_1-2}, 0, \underbrace{1, 1, \ldots, 1}_{x_2-4}, 0, \underbrace{1, 1, \ldots, 1}_{x_3-6}, 0, \underbrace{1, 1, \ldots, 1}_{x_4-8})$$

de $30 - 20 = 10$ uns e 3 zeros. Por outro lado, a cada sequência

$$(\underbrace{1, 1, \ldots, 1}_{a_1}, 0, \underbrace{1, 1, \ldots, 1}_{a_2}, 0, \underbrace{1, 1, \ldots, 1}_{a_3}, 0, \underbrace{1, 1, \ldots, 1}_{a_4})$$

de 10 uns e 3 zeros associamos o quádruplo $(2 + a_1, 4 + a_2, 6 + a_3, 8 + a_4) \in A$. Estas duas associações (correspondências) são inversas entre si obtendo-se, portanto, uma bijeção.
Donde, o número de elementos de A é igual ao número de sequências binárias de comprimento 13 com 10 uns e 3 zeros, o qual coincide com o número de possibilidades de escolha das posições para os 3 zeros (ou para os 10 uns) de entre as 11 possíveis, ou seja, $\binom{13}{3} = \binom{13}{10} = \frac{13!}{10!\ 3!} = \frac{13 \times 12 \times 11}{6} = 286$.