Departamento de Matemática da Universidade de Aveiro

Cálculo I - agr. 4 **2016/17**

2.º teste Duração: 2h15

- **Todos os raciocínios devem ser convenientemente justificados e todas as respostas devem ser cuidadosamente redigidas.**

---

1. Considera os seguintes integrais:

   (i) $\displaystyle\int_1^3 \frac{1}{x^2-2x}\,dx$; (ii) $\displaystyle\int_1^\infty (\ln x)^{-1/2}\,\frac{1}{x}\,dx$.

   (a) Diz, para cada um deles e justificando devidamente, se estamos em presença de um integral de Riemann ou de um integral impróprio (e de que espécie).

   (b) Para cada um dos integrais acima, faz o seguinte: no caso de ser de Riemann, calcula-o; no caso de ser impróprio, determina a sua natureza e, no caso de ser convergente, calcula-o também.

2. (a) Estuda a natureza (divergência, convergência simples ou convergência absoluta) das seguintes séries numéricas:

   (i) $\displaystyle\sum_{n=1}^\infty \frac{(-1)^n}{n^2}\arcsin\left(\frac{n}{n+1}\right)$; (ii) $\displaystyle\sum_{n=1}^\infty \frac{3(n+1)^2}{\pi^{n+1}}$.

   (b) Determina a soma da seguinte série numérica convergente: $\displaystyle\sum_{n=2}^\infty \left(\frac{(-2)^{n-1}}{3^{n-1}} + \frac{2}{n^2-1}\right)$.

   Sugestão: Tira partido do resultado enunciado na questão 5.(a) abaixo.

3. Determina a derivada no ponto $x = 0$ da função F definida por

$$F(x) := \int_{\sin(x^2)}^{\sqrt{x^2+1}} \arctan(t^2)\,dt, \quad x \in \mathbb{R}.$$

4. Determina a natureza de

   (a) $\displaystyle\int_2^\infty \frac{1}{x\ln x}\,dx$; (b) $\displaystyle\sum_{n=2}^\infty \frac{1}{n\ln n}$.

5. Sejam $\sum_{n=1}^\infty a_n$ e $\sum_{n=1}^\infty b_n$ duas séries numéricas. Mostra que

   (a) se forem ambas convergentes, então $\sum_{n=1}^\infty (a_n+b_n)$ também é convergente e $\sum_{n=1}^\infty (a_n+b_n) = \sum_{n=1}^\infty a_n + \sum_{n=1}^\infty b_n$;

   (b) se uma for convergente e a outra for divergente, então $\sum_{n=1}^\infty (a_n+b_n)$ diverge;

   (c) se foram ambas divergentes, há casos em que $\sum_{n=1}^\infty (a_n+b_n)$ converge e outros em que $\sum_{n=1}^\infty (a_n+b_n)$ diverge.

FIM

Cotação:

1. 6; 2. 6; 3. 3; 4. 2,5; 5. 2,5.