Departamento de Matemática da Universidade de Aveiro

CÁLCULO II - Agrupamento 4 7 de maio de 2021

1.º Teste de Avaliação Discreta Duração: 2h

Justifique todas as respostas. O formulário encontra-se no verso.

---

1. [**35**] Considere $f(x) = e^{-x^2}$, $x \in \mathbb{R}$.
   (a) Desenvolva a função f em série de MacLaurin.
   (b) Use a série obtida em (a) para mostrar que $f'(x) = -2x\, e^{-x^2}$, $x \in \mathbb{R}$.

2. [**40**] Considere a função $f(x) = \ln(x+4)$, com $x > -4$.
   (a) Escreva a fórmula de Taylor de ordem 3 da função f no ponto $c = -3$, com resto de Lagrange.
   (b) Calcule um valor aproximado de $\ln(2)$ usando o polinómio de Taylor de ordem 3 de f no ponto $c = -3$ e mostre que o erro absoluto cometido nessa aproximação é inferior a $0,25$.

3. [**50**] Considere a função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, periódica de periodo 2π, definida no intervalo $[-\pi, \pi[$ por
$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{se } -\pi \le x < 0, \\ \pi - x, & \text{se } 0 \le x < \pi. \end{cases}$$
   (a) Sabendo que a série de Fourier de f tem a forma
$$\frac{\pi}{4} + \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{2}{\pi(2n-1)^2} \cos\left((2n-1)x\right) + b_n \operatorname{sen}(nx) \right],$$
   calcule os coeficientes b_n, $n \in \mathbb{N}$.
   (b) Sendo S a função soma da série anterior, justifique que $S(0) = \dfrac{\pi}{2}$ e represente-a graficamente no intervalo $[-2\pi, 2\pi]$.
   (c) Usando a série de Fourier obtida, prove que $\pi^2 = \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{8}{(2n-1)^2}$.

4. [**60**] Considere a função $f : D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ dada por $f(x,y) = \dfrac{3x^2}{1 - x^2 - y^2}$.
   (a) Determine o domínio, D, e a curva de nível 1, C_1, da função f. Represente ou descreva ambos geometricamente.
   (b) Determine as derivadas parciais f'_x e f'_y.
   (c) Justifique que f é diferenciável no seu domínio e determine uma equação do plano tangente ao gráfico de f no ponto $(1, 1, -3)$.
   (d) Determine os vetores unitários $\vec{v} = (v_1, v_2)$ tais que $D_{\vec{v}} f(1,1) = 0$.

5. [**15**] Considere uma série de potências $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n\, x^n$ com raio de convergência $R > 0$.
   Mostre que a série é uniformemente convergente em cada intervalo da forma $[-b, b]$, com $0 < b < R$.

FORMULÁRIO

Algumas fórmulas de derivação

$(f\,g)' = f'g + f\,g'$	$(\frac{f}{g})' = \frac{f'g - f\,g'}{g^2}$
$(k\,f)' = k\,f' \qquad (k \in \mathbb{R})$	$(f^\alpha)' = \alpha\, f^{\alpha-1} f' \qquad (\alpha \in \mathbb{R})$
$(a^f)' = f'\,a^f\, \ln a \qquad (a \in \mathbb{R}^+)$	$(\log_a f)' = \frac{f'}{f\,\ln a} \qquad (a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\})$
$(\operatorname{sen} f)' = f'\, \cos f$	$(\cos f)' = -f' \operatorname{sen} f$
$(\operatorname{tg} f)' = f'\, \sec^2 f = \frac{f'}{\cos^2 f}$	$(\operatorname{cotg} f)' = -f' \operatorname{cosec}^2 f = -\frac{f'}{\operatorname{sen}^2 f}$
$(\operatorname{arcsen}\, f)' = \frac{f'}{\sqrt{1-f^2}}$	$(\arccos\, f)' = -\frac{f'}{\sqrt{1-f^2}}$
$(\operatorname{arctg}\, f)' = \frac{f'}{1+f^2}$	$(\operatorname{arccotg}\, f)' = -\frac{f'}{1+f^2}$

Alguns desenvolvimentos em série de MacLaurin

- $$\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n = 1 + x + x^2 + \cdots + x^n + \cdots, \quad x \in]-1,1[$$
- $$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \cdots, \quad x \in \mathbb{R}$$
- $$\operatorname{sen} x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} = x - \frac{x^3}{3!} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \cdots, \quad x \in \mathbb{R}$$
- $$\cos x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} = 1 - \frac{x^2}{2!} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + \cdots, \quad x \in \mathbb{R}.$$