

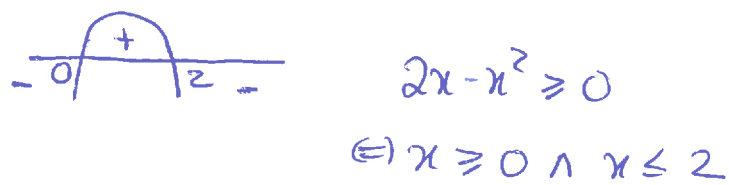
Resolução Questão ①

a) $D_f = \left\{ x \in \mathbb{R} : \underbrace{2x - x^2 \geq 0}_{(A)} \wedge \underbrace{-1 \leq 1 - x \leq 1}_{(B)} \right\}$

e. Aux.

(A) A inequação $2x - x^2 \geq 0$ pode ser resolvida com recurso à representação gráfica ou a uma tabela de sinal ou ainda analiticamente.

1. $2x - x^2 = 0 \Leftrightarrow x(2 - x) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \vee x = 2$
 concavidade voltada para baixo



ou 2. tabela

	$-\infty$	0		2	$+\infty$
x	-	0	+	+	+
$2 - x$	+	+	+	0	-
$2x - x^2$	-	0	+	0	-

$2x - x^2 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq 0 \wedge x \leq 2$

ou 3.

$2x - x^2 \geq 0 \Leftrightarrow x(2 - x) \geq 0$

$\Leftrightarrow (x \geq 0 \wedge 2 - x \geq 0) \vee (x \leq 0 \wedge 2 - x \leq 0)$

$\Leftrightarrow (x \geq 0 \wedge x \leq 2) \vee \underbrace{(x \leq 0 \wedge x \geq 2)}_{\text{e. imp.}}$

$\Leftrightarrow x \geq 0 \wedge x \leq 2$

e. imp.

$$(B) \quad -1 \leq 1-x \leq 1$$

$$\Leftrightarrow -1 \leq 1-x \quad \wedge \quad 1-x \leq 1$$

$$\Leftrightarrow x \leq 2 \quad \wedge \quad x \geq 0$$

$$\text{Logo } D_f = \{x \in \mathbb{R} : x \geq 0 \wedge x \leq 2\} \\ = [0, 2]$$

Nota: Poder-se-ia resolver analiticamente

$$2x-x^2 \geq 0 \wedge -1 \leq 1-x \leq 1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow [(x \geq 0 \wedge 2-x \geq 0) \vee (x \leq 0 \wedge 2-x \leq 0)] \wedge 1-x \leq 1 \wedge 1-x \geq -1$$

b) 1^o) Determinar a derivada de f

$$\begin{aligned} f'(x) &= (\sqrt{2x-x^2})' - (\arccos(1-x))' \\ &= \frac{(2x-x^2)'}{2\sqrt{2x-x^2}} - \left(-\frac{(1-x)'}{\sqrt{1-(1-x)^2}}\right) \\ &= \frac{2-2x}{2\sqrt{2x-x^2}} + \frac{-1}{\sqrt{1-1+2x-x^2}} \\ &= \frac{2(1-x)}{2\sqrt{2x-x^2}} - \frac{1}{\sqrt{2x-x^2}} \\ &= \frac{-x}{\sqrt{2x-x^2}} \end{aligned}$$

$$D_{f'} =]0, 2[$$

2.º) Determinar os zeros da derivada

$$f'(x) = 0$$

$$\Leftrightarrow -\frac{x}{\sqrt{2x-x^2}} = 0$$

$$\Leftrightarrow -x = 0 \wedge 2x - x^2 > 0$$

$$\Leftrightarrow x = 0 \wedge x > 0 \wedge x < 0 \quad (\text{usando os cálculos da linha anterior})$$

Logo, como $0 \notin D_f'$, a função derivada não admite zeros.

3.º) Análise de f e f'

opção 1

f e f' continua num intervalo compacto (fechado e limitado). O Teorema de Weierstrass garante-nos a existência de extremos globais.

Pontos críticos (neste caso, são os pontos onde a derivada não existe): 0 e 2.

$$f(0) = \sqrt{2 \times 0 - 0} - \arccos(1-0) = -\arccos(1) = 0$$

$$f(2) = \sqrt{2 \times 2 - 4} - \arccos(1-2) = -\arccos(-1) = -\pi$$

Logo, máximo absoluto (global) é 0 e o respetivo maximizante é 0. O mínimo absoluto (global) é $-\pi$ e o respetivo minimizante é 2.

opção 2

• f é contínua em $[0, 2]$

• $f'(x) < 0$, $\forall x \in]0, 2[$

Então, a função f é estritamente decrescente no seu domínio (consequência do T. de Lagrange)

x	0		2
$f'(x)$	N.D	-	N.D
$f(x)$	$f(0)$	\searrow	$f(2)$

$$f(0) = 0$$

$$f(2) = -\pi$$

Máximo absoluto (global) 0
maximizante 0

Mínimo absoluto (global) $-\pi$
minimizante 2