(a) $D_f = \{x \in \mathbb{R}: \ x-2 \neq 0\}$
$= \mathbb{R} \setminus \{2\}$

Como $\arctan(x)$ é uma função contínua e

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{x+1}{x-2} = 1 \quad \text{e} \quad \lim_{x \to -\infty} \frac{x+1}{x-2} = 1$$

tem-se

$$\lim_{x \to +\infty} \arctan\left(\frac{x+1}{x-2}\right) = \frac{\pi}{4} \quad \text{e}$$

$$\lim_{x \to +\infty} \arctan\left(\frac{x+1}{x-2}\right) = \frac{\pi}{4}$$

b) Note que a função é contínua em todos os pontos do domínio.

Por outro lado,

$$f'(x) = \frac{\left(\frac{x+1}{x-2}\right)'}{1+\left(\frac{x+1}{x-2}\right)^2} = -\frac{3}{2x^2-2x+5},$$

que existe para qualquer $x \in D_f$,

$\therefore$ f é diferenciável em D_f.

Como todos os pontos em D_f são pontos interiores e f' nunca se anula, pelo Teorema de Fermat f não tem extremos locais e portanto não tem extremos globais.

2 (a) (i) (1,5 val.)

Fazemos primitivação por partes:

$$\int (x+1)\, e^{2x}\, dx = \int (x+1)\, d\Big(\frac{e^{2x}}{2}\Big) = (x+1)\,\frac{e^{2x}}{2} - \int \frac{e^{2x}}{2}\, d(x+1)$$

$$= \frac{x+1}{2}\, e^{2x} - \frac{1}{2}\int e^{2x}\, dx = \frac{x+1}{2}\, e^{2x} - \frac{1}{4}\, e^{2x} + C = \frac{2x+1}{4}\, e^{2x} + C, \quad C \in \mathbb{R}.$$

2 (a) (ii) (2,0 val.)

Verificamos, por substituição, que o polinómio $x^4 + x^3 - x - 1$ tem zeros $x = 1$ e $x = -1$. Dividindo este polinómio, sucessivamente, por $(x-1)$ e por $(x+1)$, obtemos o polinómio na forma fatorizada $x^4 + x^3 - x - 1 = (x-1)(x+1)(x^2+x+1)$. Usando o método de coeficientes indeterminados, chegamos à representação

$$\frac{1}{(x-1)(x+1)(x^2+x+1)} = \frac{1}{6}\,\frac{1}{x-1} - \frac{1}{2}\,\frac{1}{x+1} + \frac{1}{3}\,\frac{x-1}{x^2+x+1}.$$

Repara que o polinómio $x^2 + x + 1$ tem raízes complexas conjugadas $x = -\frac{1}{2} \pm i\frac{\sqrt{3}}{2}$ e portanto $x^2 + x + 1 = (x + \frac{1}{2})^2 + \frac{3}{4}$.

Primitivando o primeiro termo na parte direita desta equação, temos

$$\int \frac{1}{6}\,\frac{1}{x-1}\, dx = \frac{1}{6}\ln|x-1| + C.$$

Primitivando o segundo termo, temos

$$-\int \frac{1}{2}\,\frac{1}{x+1}\, dx = -\frac{1}{2}\ln|x+1| + C.$$

Primitivando o terceiro termo, temos

$$\int \frac{1}{3}\,\frac{x-1}{x^2+x+1} = \frac{1}{3}\int \frac{x-1}{(x+\frac{1}{2})^2 + \frac{3}{4}}.$$

Fazendo a mudança da variável $x + \frac{1}{2} = t$ e usando que $dx = dt$, obtemos

$$\frac{1}{3}\int \frac{t - \frac{3}{2}}{t^2 + \frac{3}{4}}\, dt = \frac{1}{3}\int \frac{t}{t^2 + \frac{3}{4}}\, dt - \frac{1}{3}\int \frac{\frac{3}{2}}{t^2 + \frac{3}{4}}\, dt$$

$$= \frac{1}{3}\int \frac{1}{t^2 + \frac{3}{4}}\,\frac{1}{2}\, d\Big(t^2 + \frac{3}{4}\Big) - \frac{1}{2}\int \frac{1}{t^2 + \frac{3}{4}}\, dt.$$

O primeiro termo desta fórmula é igual a $\frac{1}{6}\ln\Big(t^2 + \frac{3}{4}\Big) + C$. Fazendo a mudança de variável inversa, obtemos $\frac{1}{6}\ln\Big(x^2 + x + 1) + C$.

No cálculo do segundo termo fazemos a substituição $t = \sqrt{\frac{3}{4}}\, u$ e temos (usando que $dt = \sqrt{\frac{3}{4}}\, du$):

$$-\frac{1}{2}\int \frac{1}{\frac{3}{4}u^2 + \frac{3}{4}}\sqrt{\frac{3}{4}}\, du = -\frac{1}{2}\sqrt{\frac{3}{4}}\int \frac{1}{\frac{3}{4}(u^2+1)}\, du = -\frac{1}{\sqrt{3}}\int \frac{1}{u^2+1}\, du = -\frac{1}{\sqrt{3}}\arctan u + C.$$

Fazendo as substituições inversas de variável, obtemos $-\frac{1}{\sqrt{3}}\arctan\left(\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\right)+C$.

A resposta final é

$$\frac{1}{6}\ln|x-1|-\frac{1}{2}\ln|x+1|+\frac{1}{6}\ln\left(x^2+x+1\right)-\frac{1}{\sqrt{3}}\arctan\left(\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\right)+C, \quad C\in\mathbb{R}.$$

2 (b) (1,5 val.)

Denotemos $u(x)=\ln(x+1)$ e $v(x)=2\sqrt{x}$. Temos $u'(x)=\frac{1}{x+1}$ e $v'(x)=\frac{1}{\sqrt{x}}$ e a fórmula do enunciado transforma-se em

$$\int u(x)\,v'(x)\,dx=u(x)\,v(x)-\int u'(x)\,v(x)\,dx,$$

o que é a fórmula de primitivação por partes. Desta forma, a passagem é justificada.

Fazendo a substituição $x=t^2,\ t>0$, e usando que $dx=2t\,dt$, temos

$$-\int\frac{2\sqrt{x}}{x+1}\,dx=-\int\frac{2t}{t^2+1}\,2t\,dt=-4\int\frac{t^2}{t^2+1}\,dt=-4\int\left(1-\frac{1}{t^2+1}\right)dt$$
$$=-4t+4\arctan t+C=-4\sqrt{x}+4\arctan\sqrt{x}+C.$$

A resposta final é

$$2\sqrt{x}\,\ln(x+1)-4\sqrt{x}+4\arctan\sqrt{x}+C, \quad C\in\mathbb{R}.$$

3 (a) (1,0 val.)

As abcissas dos pontos de interseção obtêm-se da equação $x^2-x=2-|x+1|$. Consideremos 2 casos:

1) $x\geq -1$; neste caso temos $|x+1|=x+1$ e a equação toma a forma

$$x^2-x=2-(x+1)\ \Leftrightarrow\ x^2-x=1-x\ \Leftrightarrow\ x^2=1\ \Leftrightarrow\ x=-1\vee x=1.$$

Ambas as raízes satisfazem a condição $x\geq -1$. Para $x=-1$ temos $y=x^2-x=2$. Para $x=1$ temos $y=x^2-x=0$. Logo temos 2 pontos de interseção, $(-1,2)$ e $(1,0)$.

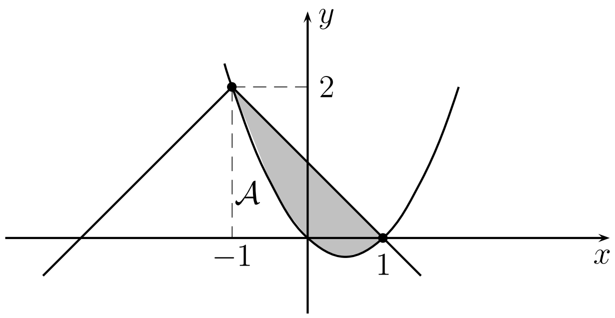
2) $x<-1$; neste caso temos $|x+1|=-(x+1)$ e a equação toma a forma

$$x^2-x=2+(x+1)\ \Leftrightarrow\ x^2-2x-3=0\ \Leftrightarrow\ x=-1\vee x=3.$$

Nenhuma desta raízes satisfaz a condição $x<-1$, logo não há soluções neste caso.

Resposta: os pontos de interseção são $(-1,2)$ e $(1,0)$.

3 (b) (1,0 val.)



3 (c) (1,0 val.)

A área da região $\mathcal{A}$ é

$$\int_{-1}^{1} (2-|x+1|-(x^2-x))\,dx = \int_{-1}^{1} (2-(x+1)-(x^2-x))\,dx = \int_{-1}^{1} (1-x^2)\,dx = \Big(x-\frac{x^3}{3}\Big)\Big]_{-1}^{1} = \frac{4}{3}.$$

4 (i) (2,0 val.)

Seja $a_n = \frac{(-1)^n}{n^2} \arcsin\left(\frac{n}{n+1}\right)$; então $|a_n| = \frac{1}{n^2}\left|\arcsin\left(\frac{n}{n+1}\right)\right|$. Sabemos que $|\arcsin x| \leq \pi/2$ para todo o $x \in [-1,\, 1]$; portanto

$$|a_n| \leq \frac{\pi}{2}\,\frac{1}{n^2}.$$

Sabemos que a série de Dirichlet $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ converge, daqui segue que a série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\pi}{2}\,\frac{1}{n^2}$ também converge, logo pelo Critério de Comparação concluimos que a série $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ converge.

Desta forma, a série original **converge absolutamente**.

4 (ii) (2,0 val.)

Seja $b_n = \frac{3(n+1)^2}{\pi^{n+1}}$. Temos

$$\lim_{n\to\infty} \frac{b_{n+1}}{b_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{3(n+2)^2}{\pi^{n+2}}\,\frac{\pi^{n+1}}{3(n+1)^2} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\pi}\,\frac{(n+2)^2}{(n+1)^2} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\pi}\Big(\frac{n+2}{n+1}\Big)^2 = \frac{1}{\pi} < 1.$$

Pelo Critério de D'Alembert concluimos que a série **converge** (e como é de termos positivos, também **converge absolutamente**).

5. (a) $\displaystyle\int_2^{\infty} \frac{1}{x\ln x}\,dx.$

$\dfrac{1}{x\ln x}$ é contínua em $[2,\infty[$, logo trata-se de um integral de 1ª espécie.

$$\int_2^{+\infty} \frac{1}{x\ln x}\,dx = \lim_{b\to\infty} \int_2^b \frac{1}{x\ln x}\,dx =$$

$$= \lim_{b\to\infty} \int_2^b \frac{\frac{1}{x}}{\ln x}\,dx =$$

$$= \lim_{b\to\infty} \Big[\ln|\ln x|\Big]_2^b$$

$$= \lim_{b\to\infty} \big(\ln(\ln b) - \ln(\ln 2)\big) = \infty$$

$\therefore$ O integral dado é divergente.

(b) $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n\ln n}$

Seja $f: [2,\infty[\longrightarrow \mathbb{R}_0^+$ dada por $f(x) := \dfrac{1}{x\ln x}$

Temos que $f(n) = \dfrac{1}{n\ln n}$, $\forall n \geq 2$, e que f é decrescente (pois $x\ln x$ é crescente).

Podemos então usar o critério do integral e afirmar que a série acima tem a mesma natureza que o integral impróprio da alínea (a).

$\therefore$ A série dada é divergente.

6. $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ séries numéricas.

(a) Se forem ambas convergentes, então, por definição,

$$\lim_{N\to\infty} (a_1+\dots+a_N) = S_1 \in \mathbb{R} \text{ e } \lim_{N\to\infty} (b_1+\dots+b_N) = S_2 \in \mathbb{R}.$$

Consequentemente, usando propriedades da adição (finita) e dos limites de sucessões,

$$\lim_{N\to\infty} \big((a_1+b_1)+\dots+(a_N+b_N)\big) =$$

$$= \lim_{N\to\infty} (a_1+b_1+\dots+a_N+b_N)$$

$$= \lim_{N\to\infty} \big((a_1+\dots+a_N)+(b_1+\dots+b_N)\big)$$

$$= \lim_{N\to\infty} (a_1+\dots+a_N) + \lim_{N\to\infty} (b_1+\dots+b_N)$$

$$= S_1+S_2 \in \mathbb{R},$$

e portanto $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n+b_n)$ converge e

$$\sum_{n=1}^{\infty} (a_n+b_n) = S_1+S_2 = \sum_{n=1}^{\infty} a_n + \sum_{n=1}^{\infty} b_n.$$

(b) Se for uma convergente e a outra divergente, digamos respectivamente a 1.ª e a 2.ª, vejamos se seria possível $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n+b_n)$ ser convergente:

Se fosse, então, como $\sum_{n=1}^{\infty} (-a_n)$ também seria, conjugando com a alínea (a) ter-se-ia que

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left((a_n+b_n)-a_n\right)$$

seria convergente. Mas a última série é $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$, que estamos a assumir divergente.

Tendo-se obtido uma contradição, é impossível $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n+b_n)$ ser convergente, logo é divergente.

(c) Considere-se $a_n=1, \forall n\in\mathbb{N}$, e $b_n=-1, \forall n\in\mathbb{N}$.
Então $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ e $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ são divergentes (para ∞ e $-\infty$ respectivamente). No entanto,

$$\sum_{n=1}^{\infty}(a_n+b_n)=\sum_{n=1}^{\infty}(1-1)=0,$$

ou seja, é convergente.

Por outro lado, se mantivermos a_n acima e considerarmos agora $b_n=1, \forall n\in\mathbb{N}$, $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ e $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ continuam a ser divergentes (agora ambas para ∞), o mesmo se passando com

$$\sum_{n=1}^{\infty}(a_n+b_n)=\sum_{n=1}^{\infty}(1+1),$$

que diverge também para ∞.

Assim, no caso de as séries dadas serem divergentes, há casos em que $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n+b_n)$ converge e casos em que esta série diverge.