Departamento de Matemática da Universidade de Aveiro

Matemática Discreta 2020/2021 - UC 47166 (1ºAno/2ºSem)

Teste T3 **Turma TP6 - Exemplo de Resolução** **22/06/2021**

Nome: **NMec:** **Curso:**

(5.0) 1. Resolva a seguinte relação de recorrência, justificando todos os passos:

$$a_n = 4a_{n-2} + 2^n, \quad n \geq 2, \quad a_0 = 2, \ a_1 = 1.$$

Resolução: A equação de recorrência dada é linear não homogénea, com solução geral

$$a_n = a_n^{(h)} + a_n^{(p)},$$

onde $a_n^{(h)}$ corresponde à solução da parte homogénea, $a_n - 4a_{n-2} = 0$, e $a_n^{(p)}$ é a solução particular associada a

$$a_n - 4a_{n-2} = f(n), \quad \text{com} \quad f(n) = 2^n \ . \tag{1}$$

Da parte homogénea resulta a equação característica:

$$x^2 - 4 = 0 \ \Leftrightarrow (x-2)(x+2 = 0 \Leftrightarrow x = \pm 2 \ ,$$

pelo que, 2 é raiz característica de multiplicidade $m = 1$ e -2 é raiz característica de multiplicidade $m = 1$. Assim,

$$a_n^{(h)} = C_1 2^n + C_2(-2)^n \ ,$$

onde C_1 e C_2 são constantes a determinar.

Como $f(n) = 2^n$ é da forma cq^n com $c = 1$ e $q = 2 \in \mathbb{Q} \setminus \{1\}$ tem-se

$$a_n^{(p)} = An^m q^n = An2^n \ ,$$

uma vez que $q = 2$ é raiz característica com multiplicidade $m = 1$.

Substituindo $a_n^{(p)}$ em (1), determina-se a constante A, vindo

$$An2^n - 4A(n-2)2^{n-2} = 2^n \Leftrightarrow An2^n - A(n-2)2^n = 2^n \Leftrightarrow An - A(n-2) = 1 \Leftrightarrow A = 1/2 \ .$$

Assim,

$$a_n = C_1 2^n + C_2(-2)^n + \frac{1}{2} n 2^n \ ,$$

e, atendendo às condições iniciais, $a_0 = 2$ e $a_1 = 1$, podem calcular-se as constantes C_1 e C_2:

$$\begin{cases} a_0 = 2 \\ a_1 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} C_1 + C_2 = 2 \\ 2C_1 - 2C_2 + 1 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} C_1 + C_2 = 2 \\ C_1 = C_2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} C_1 = 1 \\ C_2 = 1 \end{cases} .$$

Logo,

$$a_n = 2^n + (-2)^n + n2^{n-1} \ , \quad n \geq 0 \ .$$

Formulário: $\sum_{n=0}^{\infty} \alpha^n x^n = \frac{1}{1-\alpha x}$, $\sum_{n=0}^{\infty} \binom{n+m-1}{n} \alpha^n x^n = \frac{1}{(1-\alpha x)^m}$.

(2.5) 2. Determine a sucessão $(b_n)_{n\geq 0}$ associada à função geradora $\mathcal{B}(x) = \frac{x}{(1+2x)(1-x)}$.

Resolução: Temos que $\mathcal{B}(x) = \frac{x}{(1+2x)(1-x)} = \frac{A}{1+2x} + \frac{B}{1-x}$, onde

$A = \left.\frac{x}{(1-x)}\right]_{x=-1/2} = -\frac{1}{3}$ e $B = \left.\frac{x}{(1+2x)}\right]_{x=1} = \frac{1}{3}$.

Logo $\mathcal{B}(x) = -\frac{1}{3} \times \frac{1}{1+2x} + \frac{1}{3} \times \frac{1}{1-x} = -\frac{1}{3}\sum_{n=0}^{\infty}(-2x)^n + \frac{1}{3}\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{3}\big(-(-2)^n + 1\big)x^n$.

Assim, $b_n = \frac{1}{3}\big(1 - (-2)^n\big)$, $n \geq 0$.

(2.5) 3. Considere o problema de determinar o número de maneiras de distribuir n melões por 4 caixas, de modo que uma caixa fique com, pelo menos, 2 melões, outra com, no máximo, 4 melões, não havendo restrições nas restantes, para $n \geq 2$. Mostre que, a solução do problema pode ser obtida a partir da função geradora:

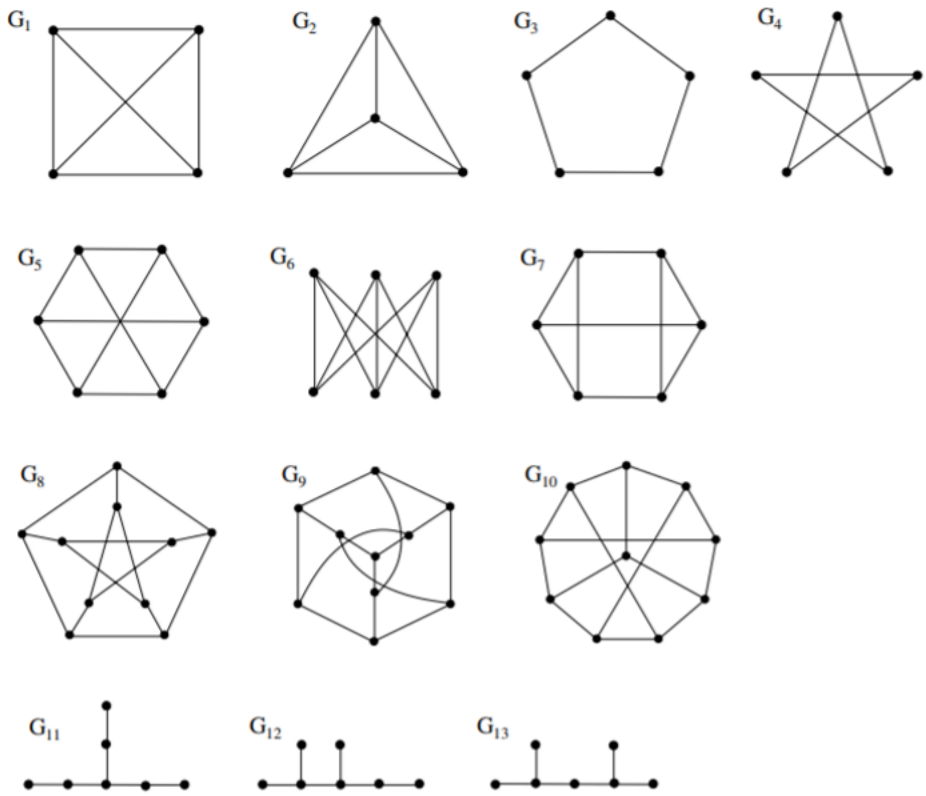
$$\mathcal{F}(x) = \frac{x^2 - x^7}{(1-x)^4} .$$

Resolução: A solução do problema é dada pelo coeficiente do termo x^n, no desenvolvimento em série de potências de x, da função geradora $\mathcal{F}(x)$ que é o produto das seguintes funções geradoras:

- "uma caixa com, pelo menos, 2 melões" :
  $\mathcal{F}_1(x) = x^2 + x^3 + x^4 + \cdots = x^2(1 + x + x^2 + \cdots) = x^2\sum_{n=0}^{\infty} x^n = x^2 \times \frac{1}{1-x}$;
- "uma caixa com, no máximo, 4 melões" :
  $\mathcal{F}_2(x) = 1 + x + x^2 + x^3 + x^4 = \sum_{k=0}^{4} x^k = \frac{1-x^5}{1-x}$;
- "uma caixa sem restrições" :
  $\mathcal{F}_3(x) = 1 + x + x^2 + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x}$;
- "uma caixa sem restrições" :
  $\mathcal{F}_4(x) = 1 + x + x^2 + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x}$.

Assim, $\mathcal{F}(x) = \mathcal{F}_1(x)\mathcal{F}_2(x)\mathcal{F}_3(x)\mathcal{F}_4(x) = \frac{x^2}{1-x}\frac{1-x^5}{1-x}\frac{1}{1-x}\frac{1}{1-x} = \frac{x^2-x^7}{(1-x)^4}$, como queriamos mostrar.

4. Considere os grafos $G_i = (V(G_i), E(G_i))$, para $i = 1, 2, \ldots, 13$, representados na figura seguinte:



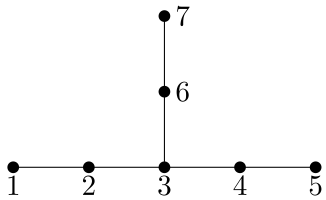
(3.5) 4.(a) Indique dois grafos não isomorfos da mesma ordem. Justifique, devidamente, a sua resposta.

Resolução: Por exemplo, os grafos G_{11} e G_{12} são da mesma ordem, porque $|V(G_{11}| = |V(G_{12}| = 7$ e não são isomorfos, porque a sequência dos graus dos vértices de G_{11}, $(1, 1, 1, 2, 2, 2, 3)$, é diferente da sequência dos graus dos vértices de G_{12}, $(1, 1, 1, 1, 2, 2, 3)$ e os isomorfismos preservam os graus dos vértices.

Outros exemplos de pares de grafos da mesma ordem não isomorfos são: (G_5, G_7), (G_6, G_7), (G_{11}, G_{13}) e (G_{12}, G_{13}).

(1.5) 4.(b) Numere os vértices do grafo representado por G_{11} e escreva a matriz de adjacência desse grafo.

Resolução:



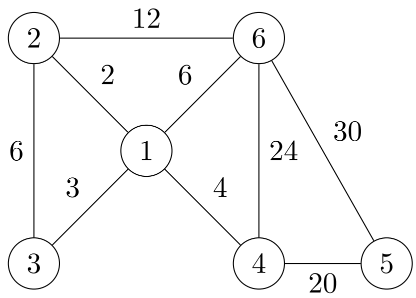
$$A_{G_{11}} = \begin{array}{c} \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \\ 7 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \end{array}$$

5. Considere o grafo $G = (V(G), E(G))$, com $V(G) = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, definido pela matriz de custos:

$$W = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 & 4 & \infty & 6 \\ 2 & 0 & 6 & \infty & \infty & 12 \\ 3 & 6 & 0 & \infty & \infty & \infty \\ 4 & \infty & \infty & 0 & 20 & 24 \\ \infty & \infty & \infty & 20 & 0 & 30 \\ 6 & 12 & \infty & 24 & 30 & 0 \end{pmatrix}.$$

(1.5) 5.(a) Represente o grafo G com indicação do custo associado em cada uma das arestas.

Resolução: O grafo G com os custos nas arestas é



(3.5) 5.(b) Aplicando o algoritmo de Dijkstra, determine o caminho de custo mínimo entre os vértices 2 e 5 do grafo G representado na alínea anterior, indicando também qual é esse custo.

Resolução: Aplicamos o algoritmo de Dijkstra, começando pelo vértice $z = 2$ e parando quando o vértice $z = 5$ se torna definitivo:

Iteração	1	2	3	4	5	6	z
0	$(\infty, -)$	$(\mathbf{0}, -)$	$(\infty, -)$	$(\infty, -)$	$(\infty, -)$	$(\infty, -)$	2
1	$(\mathbf{2}, \mathbf{2})$	$\times$	$(6, 2)$	$(\infty, -)$	$(\infty, -)$	$(12, 2)$	1
2	$\times$	$\times$	$(\mathbf{5}, \mathbf{1})$	$(6, 1)$	$(\infty, -)$	$(8, 1)$	3
3	$\times$	$\times$	$\times$	$(\mathbf{6}, \mathbf{1})$	$(\infty, -)$	$(8, 1)$	4
4	$\times$	$\times$	$\times$	$\times$	$(26, 4)$	$(\mathbf{8}, \mathbf{1})$	6
5	$\times$	$\times$	$\times$	$\times$	$(\mathbf{26}, \mathbf{4})$	$\times$	5

Concluímos que o caminho de custo mínimo entre os vértices 2 e 5 é $P = 2, 1, 4, 5$ com custo 26.