Cálculo I - agr. 4 2020/21

2.º teste - turmas TP4B-1, TP4A-7, TP4B-6

Resolução

1. (a) $\displaystyle\int x^2\cdot \operatorname{arctg}\frac{x}{3}\,dx = \frac{x^3}{3}\cdot\operatorname{arctg}\frac{x}{3} - \int \frac{x^3}{3}\cdot\frac{\frac{1}{3}}{1+\frac{x^2}{9}}\,dx$

(30 pontos)

$$= \frac{x^3}{3}\cdot\operatorname{arctg}\frac{x}{3} - \int \frac{x^3}{9+x^2}\,dx$$

$$= \frac{x^3}{3}\cdot\operatorname{arctg}\frac{x}{3} - \int x - \frac{9x}{x^2+9}\,dx$$

C.A.:
$$\begin{array}{r|l} x^3 & x^2+9 \\ \cline{2-2} -x^3-9x & x \\ \hline -9x & \end{array}$$

$$= \frac{x^3}{3}\cdot\operatorname{arctg}\frac{x}{3} - \frac{x^2}{2} + \frac{9}{2}\ln(x^2+9) + C,$$

C constante.

(b) $\displaystyle\int \frac{x^2+x+1}{(x+5)^3}\,dx$

(40 pontos)

$$= \int \frac{21}{(x+5)^3} - \frac{9}{(x+5)^2} + \frac{1}{x+5}\,dx$$

$$= 21\cdot\frac{(x+5)^{-2}}{-2} - 9\cdot\frac{(x+5)^{-1}}{-1} + \ln|x+5| + C$$

$$= \frac{-21}{2(x+5)^2} + \frac{9}{x+5} + \ln|x+5| + C,$$

C constante em intervalos.

C.A.:

$$\frac{x^2+x+1}{(x+5)^3} = \frac{A}{(x+5)^3} + \frac{B}{(x+5)^2} + \frac{C}{x+5}$$

$$\Rightarrow x^2+x+1 = A + B(x+5) + C(x+5)^2$$

$$\Leftrightarrow x^2+x+1 = A + Bx + 5B + Cx^2 + 10Cx + 25C$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} C=1 \\ B+10C=1 \\ A+5B+25C=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} C=1 \\ B=-9 \\ A=21 \end{cases}$$

(c) $\displaystyle\int \frac{e^{-x}}{e^{-x}+e^{x}}\,dx$

(30 pontos)

$$= \int \frac{t}{t+t^{-1}}\cdot\left(-\frac{1}{t}\right)dt$$

$$= -\int \frac{t}{t^2+1}\,dt = -\frac{1}{2}\ln(t^2+1) + C$$

$$= -\frac{1}{2}\ln(e^{-2x}+1) + C,$$

C constante.

C.A.: Mudança de variável dada por $e^{-x}=t$, $\Leftrightarrow e^{x}=\frac{1}{t}$, $\Leftrightarrow x=\ln\frac{1}{t}$, $\Leftrightarrow x=-\ln t$.
$(t>0)$

$\frac{dx}{dt} = -\frac{1}{t} < 0$ (sinal constante)

NOTA: tb seria possível ir por $e^{x}=t$, etc.

2. $A := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 2-x \leq y \leq 2-(x-2)^2\}$.

(a) (15 pontos)

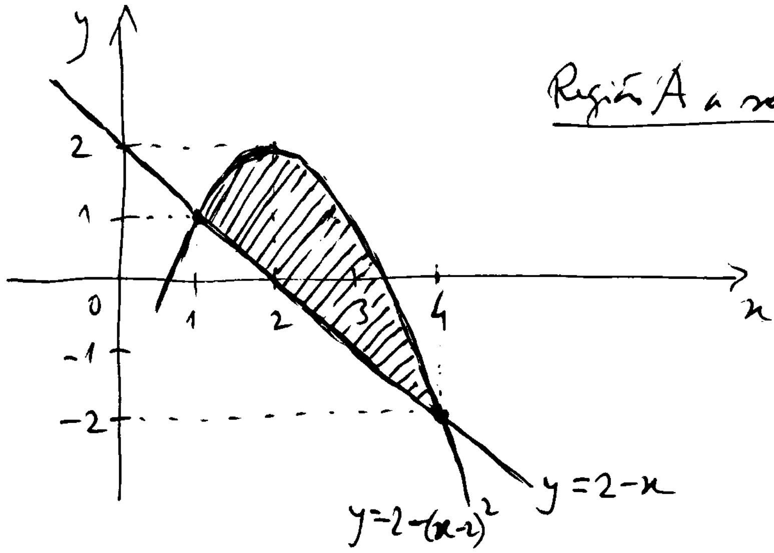
$$\begin{cases} y = 2-x \\ y = 2-(x-2)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \cancel{2} - x^2 + 4x - 4 = \cancel{2} - x \\ \text{—} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 5x + 4 = 0 \\ \text{—} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{5 \pm \sqrt{25-16}}{2} \\ \text{—} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{5 \pm 3}{2} \\ \text{—} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 1 \end{cases} \vee \begin{cases} x = 4 \\ y = -2 \end{cases}.$$

$\therefore$ Os pontos de interseção pedidos são $(1,1)$ e $(4,-2)$.

(b) (25 pontos)



Região A a sombreado

(c) (30 pontos)

$$\text{Área de } A = \int_1^4 2-(x-2)^2-(2-x)\,dx$$

$$= \int_1^4 x-(x-2)^2\,dx$$

$$= \left[\frac{x^2}{2} - \frac{(x-2)^3}{3}\right]_1^4$$

$$= \frac{16}{2} - \frac{8}{3} - \frac{1}{2} - \frac{1}{3}$$

$$= \frac{15}{2} - \frac{9}{3} = \frac{27}{6} = \frac{9}{2}.$$

3. $f(x) := \int_0^{\sin x} \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}\, dt$, $x \in \left]\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right[$

(a) Podemos usar a Fórmula de Barrow para

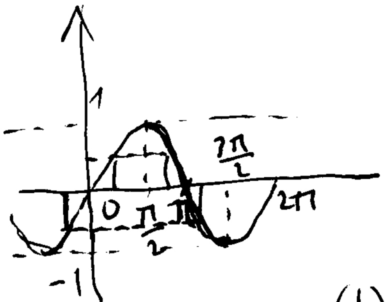
(10 pontos) calcular o integral:

$\frac{1}{\sqrt{1-t^2}}$ é contínua no seu domínio, que é $]-1,1[$; como $\sin x \in]-1,1[$ quando $x \in \left]\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right[$, então o t no integral varia dentro do domínio de $\frac{1}{\sqrt{1-t^2}}$.

$$\int_0^{\sin x} \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}\, dt = \Big[\arcsin t\Big]_0^{\sin x} =$$

$$= \arcsin(\sin x) - \arcsin 0$$

$$= \pi - x - 0 \text{, atendendo a que } x \in \left]\tfrac{\pi}{2}, \tfrac{3\pi}{2}\right[.$$



(b) Uma maneira: $f'(x) = (\pi - x)' = -1$.

(20 pontos) Outra maneira: Sendo $\frac{1}{\sqrt{1-t^2}}$ contínua em $]-1,1[$ e estando $\sin x$ em $]-1,1[$ (para $x \in \left]\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right[$), então o Teorema fundamental do Cálculo juntamente com a regra da cadeia permite escrever

$$f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-\sin^2 x}} \cdot \cos x = \frac{1}{\sqrt{\cos^2 x}} \cdot \cos x$$

$$= \frac{\cos x}{|\cos x|} = -1 \text{, onde a última igualdade}$$

provém do facto de para $x \in \left]\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right[$ o $\cos x$ ser < 0 .