Cálculo I - agr. 4 2020/21

1.º teste – turmas TP4B-2, TP4B-7

<u>Resolução</u>

1. $f(x) := 10 \operatorname{arctg}(3x^{-2}-1)$

(a) $D_f = \left\{ x \in D_{3x^{-2}-1} : 3x^{-2}-1 \in \underbrace{D_{\operatorname{arctg}}}_{= \mathbb{R}} \right\}$

(40 pontos)

Logo, a única restrição é $x \in D_{3x^{-2}-1}$, ou seja, $x \neq 0$.

$\therefore D_f = \mathbb{R}\setminus\{0\}$.

(b) $f'(x) = 10 \cdot \dfrac{(3x^{-2}-1)'}{1+(3x^{-2}-1)^2} = \dfrac{-60x^{-3}}{1+(3x^{-2}-1)^2}, \quad x \in \mathbb{R}\setminus\{0\}.$

(130 pontos)

$$f'(x) > 0 \Leftrightarrow -60x^{-3} > 0 \Leftrightarrow x^{-3} < 0 \Leftrightarrow x < 0$$

	$-\infty$		0		$+\infty$
f'		$+$	n.d.	$-$	
f		$\nearrow$	n.d.	$\searrow$	

Não existem máximos: apesar de $\lim_{x\to 0} f(x) = 5\pi$, que excede todos os valores de f, não é máximo porque não é atingido em nenhum valor do domínio de f.

Não existem mínimos: apesar de $\lim_{x\to \pm\infty} f(x) = -\frac{5\pi}{2}$, que é menor que todos os valores de f, não é mínimo porque não é atingido em nenhum valor do domínio de f.

<u>NOTA</u>: Em alternativa, também era possível concluir invocando o T. Fermat.

2. $f(x) := \sqrt{1+x}$ em $[0,b]$, com $b>0$.

(a) (15 pontos) Como f é contínua em $[0,b]$ e diferenciável em $]0,b[$ (ou seja, f é regular em $[0,b]$), então podemos aplicar o T. Lagrange e afirmar que

$$\exists c \in]0,b[: \underbrace{f'(c) = \frac{f(b)-f(0)}{b-0}}$$

$$\Leftrightarrow$$

$$\frac{1}{2\sqrt{1+c}} = \frac{\sqrt{1+b}-1}{b}$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{1+b} - 1 = \frac{b}{2\sqrt{1+c}} \Leftrightarrow \sqrt{1+b} = 1 + \frac{b}{2\sqrt{1+c}}, \text{ c.q.d.}$$

(b) (15 pontos) A partir da alínea anterior, como $c>0$ então $2\sqrt{1+c} > 2$; como $b>0$, então $\frac{b}{2\sqrt{1+c}} < \frac{b}{2}$; conjugando com o resultado da alínea anterior, vem então que

$$\sqrt{1+b} = 1 + \frac{b}{2\sqrt{1+c}} < 1 + \frac{b}{2}, \text{ c.q.d.}$$

<u>NOTA</u>: Alternativa para a alínea (b):

$$\sqrt{1+b} < 1+\frac{b}{2} \underset{b>0}{\Leftrightarrow} 1+b < \left(1+\frac{b}{2}\right)^2$$

$$\Leftrightarrow 1+b < 1+b+\frac{b^2}{4} \Leftrightarrow 0 < \frac{b^2}{4},$$ que é uma condição universal (também atendendo a que, por hipótese, b não é zero); devido às equivalências, a condição inicial também é universal (no universo dos b positivos).