

Álgebra Linear e Geometria Analítica

Agrupamento IV

9/11/2022

1<sup>o</sup> Teste

Duração: 1h45min

*Justifique detalhadamente todas as respostas. Apresente todos os cálculos.*

(6.0) 1. Sejam  $\alpha$  e  $\beta$  parâmetros reais,  $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2\beta & \alpha - 1 & 0 \\ \beta & 0 & \alpha - \alpha^2 \end{bmatrix}$ ,  $B = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 - \alpha \end{bmatrix}$  e  $X = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$  um vetor de incógnitas. .

(a) Considere  $\beta = 0$ . Determine para que valores de  $\alpha$  se verifica que:

- i.  $\text{car}(A) = 2$ ;
- ii.  $\text{nul}(A) = 2$ ;
- iii. o sistema homogêneo  $AX = 0$  tem apenas a solução trivial,  $X = 0$ ;
- iv. o sistema  $AX = B$  é impossível.

(b) Considere  $\alpha = 2$  e  $\beta = 1$ . Resolva o sistema  $AX = B$  com o método de eliminação de Gauss e indique o respetivo conjunto de soluções.

(6.0) 2. Seja  $M = \begin{bmatrix} 1 & 1 & k \\ 1 & 1 & 1 \\ k & 0 & k \end{bmatrix}$ , onde  $k$  é um parâmetro real.

- (a) Calcule o determinante da matriz  $M$ .
- (b) Determine todos os valores de  $k$  para os quais a matriz  $M$  é invertível. Justifique.
- (c) Considere  $k = 3$ . Calcule a entrada  $(2, 3)$  da inversa de  $M$ , sem calcular a inversa.
- (d) Considere, novamente,  $k = 3$ . Sabendo que  $N$  é uma matriz de ordem 3 e que  $\det(2M^{-1}N^T) = 8$ , calcule  $\det(N)$ .

(4.0) 3. Considere os vetores  $u = (1, 1, -1)$  e  $v = (1, 2, 0)$ .

- (a) Determine todos os vetores perpendiculares a  $u$  e  $v$  de comprimento  $2\sqrt{6}$ .
- (b) Determine o seno do ângulo  $\theta \in [0, \pi]$  formado pelos vetores  $u$  e  $v$ .

(4.0) 4. Considere o plano  $\mathcal{P} : 2x - 2y + z = 4$  e as retas  $\mathcal{R} : \begin{cases} x + y = 3 \\ 4y - z = 4 \end{cases}$  e  $\mathcal{S} : \begin{cases} 2x + z = 1 \\ 2y - 3z = 3 \end{cases}$ .

- (a) Determine a posição relativa das retas  $\mathcal{R}$  e  $\mathcal{S}$ .
- (b) Sabendo que  $\mathcal{R}$  e  $\mathcal{P}$  não têm pontos em comum, determine a distância entre a reta  $\mathcal{R}$  e o plano  $\mathcal{P}$ .