Álgebra Linear e Geometria Analítica

Agrupamento IV: Mestrado Integrado em Eng.ª Eletrónica e Telecomunicações | Mestrado Integrado em Eng.ª de Computadores e Telemática | Licenciatura em Eng.ª Informática

03 de Fevereiro de 2020 Duração: 2h30

Exame de Recurso

Justifique devidamente todas as suas respostas.

1. Considere o sistema de equações lineares $AX = B$, cuja matriz ampliada $[A|B]$ é equivalente por linhas à matriz $[C|D]$ a seguir indicadas, sendo a um parâmetro real.

$$[A|B] = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & a & 1 & -1 \\ a & a & 1 & -1 \end{array}\right], \qquad [C|D] = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & a & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1-a & -1-a \end{array}\right]$$

   (a) Indique, justificando, os valores de a para os quais $\mathcal{N}(A) = \{(0,0,0)\}$.

   (b) Faça $a = 1$. Diga a posição relativa do plano $\mathcal{P}$ de equação cartesiana $x + y + z = 1$ e da reta $\mathcal{R}$ de equações cartesianas $\begin{cases} y + z = -1 \\ x + y + z = -1 \end{cases}$. Qual a distância entre ambos?

2. Considere A e B, matrizes 4×4 tais que $\det(A) = -2$ e $\operatorname{car}(B) = 3$. Diga se as seguintes afirmações são verdadeiras ou falsas. Justifique as verdadeiras e corrija, justificando, as falsas.

   (a) A matriz B é invertível.

   (b) $\det(2A^{-1}B^T) = 3 \times 2^4$.

3. Conhecendo as bases ordenadas $\mathcal{S} = \big((2,1,1),(0,2,1),(0,0,1)\big)$ de $\mathbb{R}^3$ e $\mathcal{T} = \big((0,1),(1,2)\big)$ de $\mathbb{R}^2$, o vetor de coordenadas $[X]_{\mathcal{S}} = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$, a matriz $C = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$ e a transformação linear $\phi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ dada por $\phi(X) = CX$ para todo o $X \in \mathbb{R}^3$ responda às seguintes questões.

   (a) Escreva o vetor X na base canónica.

   (b) Diga, justificando, se a transformação linear ϕ é injetiva. É sobrejetiva?

   (c) Encontre a matriz G representativa da transformação ϕ relativamente às bases $\mathcal{S}$ de $\mathbb{R}^3$ e $\mathcal{T}$ de $\mathbb{R}^2$.

   (d) Usando a matriz obtida na alínea anterior, determine $[\phi(X)]_{\mathcal{T}}$.
   Caso não tenha resolvido a alínea anterior, use uma matriz com as entradas todas iguais a 1.

4. Considere a matriz $A = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

   (a) Justifique que os valores próprios de A são 1 e -1.

   (b) Conhecendo o subespaço próprio $\mathcal{U}_1 = \langle (1,-1,0),(0,0,1) \rangle$, indique o conjunto de vetores próprios associados ao valor próprio 1.

   (c) A matriz A é diagonalizável? Justifique.

5. Considere a quádrica de equação $x^2 + 2x + z^2 = 2y^2 + 4y$ Determine uma sua equação reduzida e classifique-a.

Questão	1	2	3	4	5
Cotação	4	3	6	5	2