Nome: $\qquad$ nº de estudante:

Declaro que desisto:

Departamento de Matemática da Universidade de Aveiro

Cálculo I - agr. 4 **2021/22**

exame de recurso Duração: 2h20

- Este exame contém **6 questões** no total, com uma questão por folha. O enunciado do exame contém no total 7 folhas numeradas de 0 até 6. Na página inicial (esta página, pág. 0) encontras também a cotação e formulários.
- Cada pergunta deve ser respondida na **respetiva folha do enunciado** — começa na frente e, se necessário, continua no verso. Se for preciso podes ainda continuar em folhas de continuação mas tens de dizer qual é a questão a que estás a continuar a responder.
- **Não podes misturar respostas a diferentes perguntas** na mesma folha. Por exemplo, não podes responder a parte da pergunta 2 na mesma folha da questão 1, e vice-versa.
- Deves identificar todas as folhas que usares com o teu **nome e nº de estudante**. Deves indicar no enunciado de cada pergunta **quantas folhas de continuação** usaste para essa pergunta.
- Todos os raciocínios devem ser convenientemente **justificados** e todas as respostas devem ser **cuidadosamente redigidas**.

Cotação:

1. 4,5; 2. 5; 3. 3; 4. 1,5; 5. 3; 6. 3.

Algumas fórmulas de derivação

função de x	$\frac{\mathbf{d}}{\mathbf{dx}}$
$m\,u(x),\ m \in \mathbb{R}$	$m\,u'(x)$
$u(x)^n,\ n \in \mathbb{R}$	$n\,u(x)^{n-1}\,u'(x)$
$\log_a \lvert u(x)\rvert,\ a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\}$	$\frac{u'(x)}{u(x)\ln a}$
$a^{u(x)},\ a \in \mathbb{R}^+$	$a^{u(x)}u'(x)\ln a$
$\sin u(x)$	$\cos u(x)\,u'(x)$
$\cos u(x)$	$-\sin u(x)\,u'(x)$
$\tan u(x)$	$\sec^2 u(x)\,u'(x)$
$\operatorname{cotan} u(x)$	$-\csc^2 u(x)\,u'(x)$
$\sec u(x)$	$\tan u(x)\ \sec u(x)\,u'(x)$
$\csc u(x)$	$-\operatorname{cotan} u(x)\ \csc u(x)\,u'(x)$
$\sinh u(x)$	$\cosh u(x)\,u'(x)$
$\cosh u(x)$	$\sinh u(x)\,u'(x)$
$\arcsin u(x)$	$\frac{u'(x)}{\sqrt{1-u(x)^2}}$
$\arccos u(x)$	$-\frac{u'(x)}{\sqrt{1-u(x)^2}}$
$\arctan u(x)$	$\frac{u'(x)}{1+u(x)^2}$
$\operatorname{arccot} u(x)$	$-\frac{u'(x)}{1+u(x)^2}$

Algumas fórmulas trigonométricas

$\sec u = \frac{1}{\cos u}$	$\csc u = \frac{1}{\sin u}$
$\cot u = \frac{\cos u}{\sin u}$	
$\cos^2 u = \frac{1+\cos(2u)}{2}$	$\sin^2 u = \frac{1-\cos(2u)}{2}$
$1+\tan^2 u = \sec^2 u$	$1+\operatorname{cotan}^2 u = \csc^2 u$
$\cos^2(\arcsin u) = 1-u^2$	$\sin^2(\arccos u) = 1-u^2$

Algumas fórmulas hiperbólicas

$\sinh u = \frac{e^u-e^{-u}}{2}$	$\cosh u = \frac{e^u+e^{-u}}{2}$
$\cosh^2 u - \sinh^2 u = 1$	

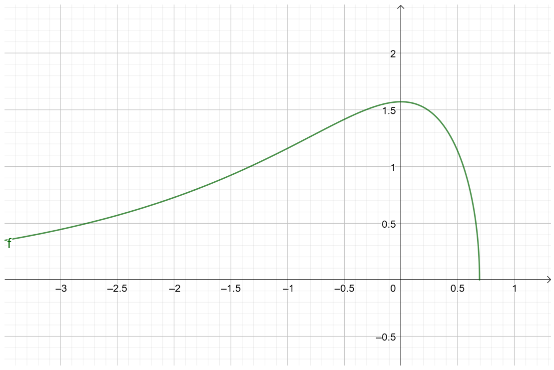
Nome: nº de estudante:

Nº folhas de continuação: $\square$ (Questão 1).

1. Considera a função real de variável real dada pela expressão

$$f(x) := \arccos(e^{2x} - 2e^{x} + 1).$$

Em baixo podes ver um esboço do seu gráfico tal como produzido por um conhecido software gráfico.



Não se garante que este esboço esteja cem por cento correto. Foi aqui colocado para o caso de achares que é útil, mas usa-o por tua conta e risco. O que se pede que faças aqui é que resolvas as questões abaixo usando as técnicas que foram dadas nas aulas (em particular não serão aceites justificações com base no esboço acima):

(a) Determina o domínio D_f de definição de f.

(b) Determina, caso existam, todos os extremos (os absolutos e os relativos) e os respetivos extremantes de f (se achares que algum deles não existe, deves explicar porquê).

Resposta à questão 1:

Nome: nº de estudante:

Nº folhas de continuação: ☐ (Questão 2).

2. Calcula as primitivas das seguintes funções:

   (a) $x^2 2^x$; (b) $\dfrac{11x+16}{(x-1)(x+2)^2}$; (c) $\dfrac{e^{2x}+e^x}{1+e^{2x}}$.

   Sugestão: Na alínea (a) utiliza primitivação por partes e na alínea (c) faz uma mudança de variável ou usa primitivação quase imediata.

Resposta à questão 2:

Nome: nº de estudante:

Nº folhas de continuação: $\square$ (Questão 3).

3. Seja $\mathcal{A} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \frac{x^2}{2} \leq y \leq \frac{1}{1+x^2}\}$.

   (a) Calcula os pontos de interseção dos gráficos de $y = \frac{x^2}{2}$ e de $y = \frac{1}{1+x^2}$.
   Nota: Para efeitos da resolução das alíneas seguintes informa-se que a solução é $(-1, \frac{1}{2})$ e $(1, \frac{1}{2})$, mas nenhuma cotação terás na presente alínea se apenas verificares que estes pontos satisfazem as duas equações.

   (b) Representa geometricamente a região $\mathcal{A}$.

   (c) Calcula a área da região $\mathcal{A}$.

Resposta à questão 3:

Nome: nº de estudante:

Nº folhas de continuação: $\square$ (Questão 4).

4. Considera o seguinte integral impróprio. Determina a sua natureza e, no caso de convergência, o seu valor.

$$\int_0^1 \sqrt{\frac{\arcsin x}{1-x^2}}\,dx.$$

Resposta à questão 4:

Nome: nº de estudante:

Nº folhas de continuação: $\square$ (Questão 5).

5. Estuda a natureza das seguintes séries numéricas. Em caso de convergência indica se é simples ou absoluta.

   (a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n+(-2)^n}{n2^n}$; (b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{(n+\ln n)^n}{2^n n^{n+1}}$.

   Sugestão: Para estudares a natureza da série dos módulos na alínea (a), se for útil podes tirar partido do facto de $|n+(-1)^n 2^n|$ ser igual a $2^n+(-1)^n n$.

Resposta à questão 5:

Nome: nº de estudante:

Nº folhas de continuação: $\square$ (Questão 6).

6. Considera a série $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\left(1-\frac{\ln n}{n}\right)^n$.

   (a) Explica porque é que não é possível determinar a sua natureza através do Critério de Cauchy.

   (b) Calcula
   $$\lim_{x\to+\infty}\left(1-\frac{\ln x}{x}\right)^x.$$

   (c) Diz, justificando, se com base no resultado da alínea anterior podes dizer qual é a natureza da série.

Resposta à questão 6: