Universidade de Aveiro
Departamento de Matemática

Cálculo I – agrupamento 4 2019/2020

FICHA DE EXERCÍCIOS 4

Integrais impróprios

1 Exercícios propostos

1. Determine a natureza dos integrais impróprios seguintes e, em caso de convergência, calcule o seu valor.

(a) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{5}{4+x^2}\,dx$ (b) $\displaystyle\int_\pi^{+\infty} \cos(3x)\,dx$ (c) $\displaystyle\int_{-\infty}^{2} \frac{1}{(4-x)^2}\,dx$ (d) $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} x\,dx$

(e) $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1+x^2}\,dx$ (f) $\displaystyle\int_{-\infty}^{0} xe^{-x^2}\,dx$ (g) $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-|x|}\,dx$ (h) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1}{\sqrt[3]{x+1}}\,dx$

(i) $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x}{(1+x^2)^2}\,dx$ (j) $\displaystyle\int_e^{+\infty} \ln x\,dx$ (k) $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{x}(\ln x)^3\,dx$

(l) $\displaystyle\int_{-\infty}^{0} \frac{4}{1+(x+1)^2}\,dx$ (m) $\displaystyle\int_{-\infty}^{0} \frac{e^{\operatorname{arctg} x}}{1+x^2}\,dx$

2. Estude, utilizando o critério de comparação ou o critério do limite, a natureza dos seguintes integrais impróprios:

(a) $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\operatorname{sen}^2 x}{x^{\frac{5}{2}}}\,dx$; (b) $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{2x}{e^{2x}-1}\,dx$; (c) $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{5x^2-3}{x^8+x-1}\,dx$; (d) $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{x^2}\,dx$.

3. Calcule, caso exista, $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx$ com $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x-1} & \text{se } x \leq 0 \\ \operatorname{arctg} x & \text{se } x > 0 \end{cases}$.

4. Estude a natureza do integral impróprio $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\cos x}{x^3} dx$.

5. Determine a natureza dos integrais impróprios seguintes e, em caso de convergência, calcule o seu valor.

(a) $\displaystyle\int_{-1}^{0} \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$; (b) $\displaystyle\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \operatorname{cotg} x\,dx$; (c) $\displaystyle\int_{-1}^{3} \frac{1}{9-x^2}\,dx$;

(d) $\displaystyle\int_0^1 \ln x\,dx$; (e) $\displaystyle\int_{-2}^{1} \frac{1}{|x|}\,dx$; (f) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{1-\operatorname{sen} x}\,dx$;

(g) $\displaystyle\int_{-2}^{2} \frac{1}{\sqrt{4-x^2}}\,dx$; (h) $\displaystyle\int_0^{\sqrt{2}} \frac{1}{\sqrt{1-\frac{x^2}{2}}}\,dx$; (i) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{e^x-1}}\,dx$;

(j) $\displaystyle\int_0^{3} \frac{1}{(x-1)(x-2)}\,dx$; (k) $\displaystyle\int_5^{+\infty} \frac{1}{x\ln^3 x}\,dx$; (l) $\displaystyle\int_{-3}^{3} \frac{x}{\sqrt{9-x^2}}\,dx$;

6. Estude, utilizando o critério de comparação ou o critério do limite, a natureza dos seguintes integrais impróprios:

(a) $\displaystyle\int_0^1 \frac{\pi}{1-\sqrt{x}}\,dx$; (b) $\displaystyle\int_{-1}^{0} \frac{-x^5}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$; (c) $\displaystyle\int_0^1 \frac{e^{-x}}{x}\,dx$. (d) $\displaystyle\int_0^{\pi} \frac{\operatorname{sen} x}{x}\,dx$.

7. Estude a natureza dos seguintes integrais impróprios:

(a) $\displaystyle\int_2^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{x^5+2x}}\,dx$; (b) $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-2x}\operatorname{sen}\sqrt{x}\,dx$; (c) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{xe^{-x}}{\sqrt{x^2+x+1}}\,dx$;

(d) $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{2+\cos(3x)}{x+2}\,dx$; (e) $\displaystyle\int_2^{+\infty} \frac{x^3+1}{x^2(x^2+1)}\,dx$; (f) $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{-1}{x^3+1}\,dx$; (g) $\displaystyle\int_0^{\pi} \frac{\cos x}{\sqrt{x}}\,dx$;

(h) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\operatorname{sen}\sqrt{x}}{\sqrt[4]{x}}\,dx$; (i) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\operatorname{sen}^2 x}{x^{\frac{5}{2}}}\,dx$; (j) $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{x\ln^3 x}\,dx$; (k) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{x+1}{\sqrt{x^3}}\,dx$;

8. Seja $f(x) = \begin{cases} m & \text{se } |x| \leq 2 \\ 0 & \text{se } |x| > 2 \end{cases}$. Determine m de modo a que $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1$.

9. Estude a natureza de cada um dos seguintes integrais impróprios e calcule o seu valor caso seja convergente.

(a) $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} 2^x dx$ (b) $\displaystyle\int_0^{+\infty} te^{-st}dt \quad (s>0)$ (c) $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-st}e^{\alpha t}dt \quad (s>\alpha)$

10. Estude a natureza do integral impróprio $\displaystyle\int_{-\infty}^{0} \frac{1}{4+x^2}\,dx$ e, em caso de convergência, indique o seu valor.

11. Mostre que o integral impróprio $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{x\ln^2 x}\,dx$ é divergente.

12. Determine a natureza do seguinte integral impróprio e, em caso de convergência, calcule o seu valor: $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}\,dx$

Exercícios Resolvidos

1. Determine a natureza do integral impróprio $\displaystyle\int_e^{+\infty} \frac{1}{x\ln x}\,dx$ e, em caso de convergência, indique o seu valor.

Resolução: Uma vez que

$$\lim_{t\to+\infty}\int_e^t \frac{1}{x\ln x}dx = \lim_{t\to+\infty}\Big[\ln|\ln x|\Big]_e^t = \lim_{t\to+\infty}\Big(\ln|\ln t| - \ln|\ln e|\Big) = +\infty$$

podemos concluir que o integral dado é divergente.

2. Determine a natureza do integral impróprio $\displaystyle\int_1^{+\infty} xe^{-x}\,dx$ e, em caso de convergência, indique o seu valor.

Resolução: Vamos estudar o seguinte limite

$$\lim_{t\to+\infty}\int_1^t xe^{-x}dx.$$

Usando o método de integração por partes podemos concluir que

$$\int xe^{-x}dx = -xe^{-x} + \int e^{-x}dx = -xe^{-x} - e^{-x} + C, \qquad C\in\mathbb{R}$$

logo
$$\lim_{t\to+\infty}\int_1^t xe^{-x}dx = \lim_{t\to+\infty}\Big[-xe^{-x}-e^{-x}\Big]_1^t = \lim_{t\to+\infty}\left(-te^{-t}-e^{-t}+\frac{1}{e}+\frac{1}{e}\right)=\frac{2}{e}$$
pois
$$\lim_{t\to+\infty}\left(-te^{-t}\right)=\lim_{t\to+\infty}\left(-\frac{t}{e^t}\right)=0.$$
Portanto, podemos concluir que o integral dado é convergente e $\displaystyle\int_1^{+\infty} xe^{-x}\,dx=\frac{2}{e}$.

3. Estude a natureza do integral impróprio $\displaystyle\int_0^{\pi} \operatorname{tg} x\,dx$.

   Resolução:

   O integral em causa é convergente se e só se forem convergentes ambos os seguintes integrais:
$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{tg} x\,dx \quad \text{e} \quad \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \operatorname{tg} x\,dx\ .$$
   Como
$$\begin{aligned}\lim_{t\to\frac{\pi}{2}^-}\int_0^t \operatorname{tg} x\,dx &= \lim_{t\to\frac{\pi}{2}^-}[-\ln(cos x)]_0^t\\ &= \lim_{t\to\frac{\pi}{2}^-}(-\ln(cos t))\\ &= +\infty,\end{aligned}$$
   o integral $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{tg} x\,dx$ é divergente. Assim, o integral em estudo é divergente.

4. Usando o Critério de Comparação ou o Critério do Limite estude a natureza do seguinte integral impróprio:
$$\int_1^{+\infty}\frac{x^2-1}{x^3+x+2}\,dx\ .$$
   Resolução: Em primeiro lugar, notar que
$$\frac{x^2-1}{x^3+x+2}\geq 0\ ,\forall x\in[1,+\infty[\,;$$
   De facto, $x^2-1\geq 0 \Leftrightarrow x\leq -1 \vee x\geq 1$ e $x^3+x+2>0$, para $x\in[1,+\infty[$, uma vez que $f(x)=x^3+x+2$ é estritamente crescente em $\mathbb{R}$ e $f(1)=4$.
$$L=\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{x^2-1}{x^3+x+2}}{\frac{1}{x}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^3-x}{x^3+x+2}=1\ ;$$
   Como $L\in\mathbb{R}^+$, pelo Critério do Limite, os integrais $\displaystyle\int_1^{+\infty}\frac{x^2-1}{x^3+x+2}\,dx$ e $\displaystyle\int_1^{+\infty}\frac{1}{x}\,dx$ têm a mesma natureza. Como $\displaystyle\int_1^{+\infty}\frac{1}{x}\,dx$ é divergente (integral de Dirichlet com $p=1$), o integral em causa é divergente.