

EXAME FINAL, 14 de Junho de 2023, Duração: **2h30m** **A** Classificação: _____

Nome: _____ Nº Mec.: _____

Declaro que desisto: _____ Folhas supl.: _____

1. (1 val) Usando a lógica de primeira ordem indique uma fórmula bem formada que traduza a afirmação

«Todos os portugueses falam português mas nem todos os portugueses falam francês.»,

usando $n(x)$, $p(x)$ e $f(x)$ com o significado de, respectivamente, « x é português», « x fala português» e « x fala francês», e considerando como universo todas as pessoas.

2. (3 val) Considere uma linguagem de primeira ordem com os símbolos de predicado P e W de dois argumentos e H , S , L de um argumento, o símbolo de constante A e as variáveis x, y , e considere as fórmulas

- $\varphi_1 \equiv \forall x((P(x, A) \wedge W(x, A)) \rightarrow H(x))$,
- $\varphi_2 \equiv \forall x \forall y((S(x) \vee L(x)) \rightarrow P(x, y))$,
- $\varphi_3 \equiv \neg S(A) \wedge L(A)$,
- $\varphi_4 \equiv \forall x(L(x) \rightarrow W(x, A))$.

Utilizando o método de resolução, mostre que $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \varphi_4 \models H(A)$.

EXAME FINAL, 14 de Junho de 2023, Duração: **2h30m** **B** Classificação: _____

Nome: _____ Nº Mec.: _____

Declaro que desisto: _____ Folhas supl.: _____

3. (2 val) Considere um conjunto A de 30 números inteiros positivos de 7 dígitos. Mostre que existem dois subconjuntos diferentes e não vazios X e Y de A tal que a soma dos elementos de X é igual à soma dos elementos de Y .

SUGESTÃO. $30 \cdot 10^7 < 2^{30} - 1$.

4. (5 val) Um hotel tem 20 quartos que vão ser pintados usando 5 cores. Cada quarto é pintado com uma única cor e existe tinta de cada cor suficiente para pintar todos os quartos.
- De quantas maneiras podemos pintar os quartos, tendo em conta que os quartos são indistinguíveis.
 - Determine o número de possibilidades de pintar os quartos, considerando que são numerados.
 - Considere, agora, que só tem tinta azul (uma das cinco cores) para pintar três quartos e o mesmo acontece relativamente à tinta verde, continuando a ter tinta suficiente de cada uma das restantes três cores para pintar todos os quartos.
 - Determine a série geradora correspondente ao problema de determinação do número de possibilidades de pintar n quartos com as cinco cores.
 - A partir da série geradora obtida em (4(c)i) obtenha o valor do coeficiente que dá a solução do problema para os 20 quartos.
-

EXAME FINAL, 14 de Junho de 2023, Duração: **2h30m** **C** Classificação: _____

Nome: _____ Nº Mec.: _____

Declaro que desisto: _____ Folhas supl.: _____

5. (1 val) Determine o coeficiente de x^4y no desenvolvimento de $(xy + \frac{2}{y} - 3x)^6$.

6. (3 val) Considere o número a_n de seqüências de comprimento $n \in \mathbb{N}$ nos algarismos «0» e «1» e no símbolo «X», que não contêm dois algarismos consecutivos.

a) Justifique que a sucessão $(a_n)_{n \geq 0}$ satisfaz a equação de recorrência $a_n = a_{n-1} + 2a_{n-2}$ ($n \geq 2$), e indique as condições iniciais.

b) Resolva a equação de recorrência indicada em (6a), determinando uma fórmula fechada para a_n .

NOTA. Se não resolveu a questão (6a), considere os valores iniciais $a_0 = a_1 = 1$.

EXAME FINAL, 14 de Junho de 2023, Duração: **2h30m****D**

Classificação: _____

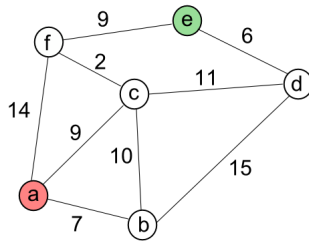
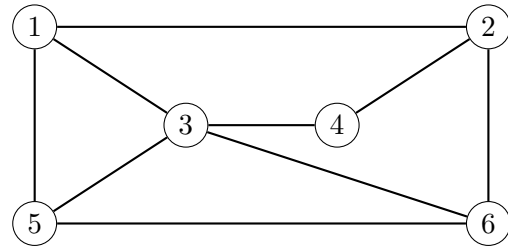
Nome: _____

Nº Mec.: _____

Declaro que desisto: _____

Folhas supl.: _____

7. (4 val) Seja G o seguinte grafo simples não orientado com custos nas arestas representado na figura 1.

Figura 1: O grafo G Figura 2: O grafo J

- Considere o subgrafo H de G induzido pelo conjunto de vértices $\{a, b, c, d, f\}$. Determine o número $\tau(H)$ de árvores abrangentes de H , aplicando a fórmula recursiva $\tau(H) = \tau(H - e) + \tau(H//e)$, sendo e uma aresta de H que não é lacete. Justifique.
 - Determine um caminho de custo mínimo entre os vértices a e e em G , aplicando o algoritmo de Dijkstra. Apresente todos os passos do algoritmo usando uma tabela adequada e indique o custo total do caminho determinado.
 - Seja J o grafo simples indicado na figura 2. Os grafos G e J são isomorfos? Justifique devidamente e, no caso afirmativo, indique o respetivo isomorfismo.
8. (1 val) Numa festa onde estão 31 pessoas é possível que cada uma destas pessoas conheça exatamente 5 das restantes pessoas? Justifique.
-