Departamento de Matemática, Universidade de Aveiro
Álgebra Linear e Geometria Analítica — Agrup. IV
Exame de Recurso; 5 de fevereiro de 2018
Duração: **2h30min**

– Justifique todas as respostas e indique os cálculos efetuados –

[50pts] 1. Sejam $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & -1 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ -2 \\ -3 \end{bmatrix}$, $C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$, $D = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$.

(a) Usando o método de eliminação de Gauss–Jordan, mostre que $[A|B] \sim [C|D]$.

(b) Indique: car(A), nul(A). Qual é a dimensão do espaço nulo de A? Justifique.

(c) Classifique o sistema $AX = B$ e determine o conjunto das suas soluções.

(d) Verifique se a matriz $C^T A$ é invertível e obtenha o seu determinante.

[20pts] 2. Sejam $\mathcal{R}$ a reta que passa em $A(1, 0, -1)$ com a direção de $u = (1, 2, 3)$ e $\mathcal{P}$ o plano de equação $x + y - z = 4$.

(a) Determine a posição relativa de $\mathcal{P}$ e $\mathcal{R}$.

(b) Calcule a distância da reta $\mathcal{R}$ ao plano $\mathcal{P}$.

[30pts] 3. Considere em $\mathbb{R}^3$ os seguintes vetores: $X_1 = (1, -1, 1)$, $X_2 = (1, 0, -1)$, $X_3 = (1, -1, -1)$.

(a) Mostre que $\mathcal{B} = (X_1, X_2, X_3)$ é uma base de $\mathbb{R}^3$.

(b) Sabendo que $\mathcal{S} = (Y_1, Y_2, Y_3)$ é uma base de $\mathbb{R}^3$ e que a matriz de mudança de base de $\mathcal{S}$ para $\mathcal{B}$ é $M_{\mathcal{B}\leftarrow\mathcal{S}} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}$, determine os vetores Y_1, Y_2 e Y_3.

(c) Considerando que $[Z]_{\mathcal{S}} = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 \end{bmatrix}^T$, determine as coordenadas de Z na base $\mathcal{B}$.

[55pts] 4. Considere a matriz $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$.

(a) Calcule os valores próprios de A.

(b) Mostre que $\mathcal{B} = ((-1, 1, 0), (1, 1, -2))$ é uma base ortogonal do subespaço próprios de A associado ao valor próprio -1.

(c) A é diagonalizável? Justifique, calculando, em caso afirmativo, uma matriz diagonal semelhante a A e uma respetiva matriz diagonalizante.

(d) Obtenha uma equação reduzida da quádrica $X^T AX + 4 = 0$, indicando a mudança de variável efetuada, e classifique-a.

[25pts] 5. Considere a aplicação linear $\phi\colon \mathbb{R}^2 \to \mathcal{P}_1$ tal que $\phi(1, 0) = 2t + 1$ e $\phi(0, 1) = t - 1$.

(a) Determine a imagem de ϕ, indique uma sua base e a sua dimensão.

(b) ϕ é um isomorfismo? Justifique.

[20pts] 6. Seja A uma matriz $n \times n$. Mostre que o conjunto das matrizes que permutam com A,

$$\mathcal{P}_A = \left\{X \in \mathbb{R}^{n\times n} : AX = XA\right\},$$

é um subespaço vetorial de $\mathbb{R}^{n\times n}$.