

---

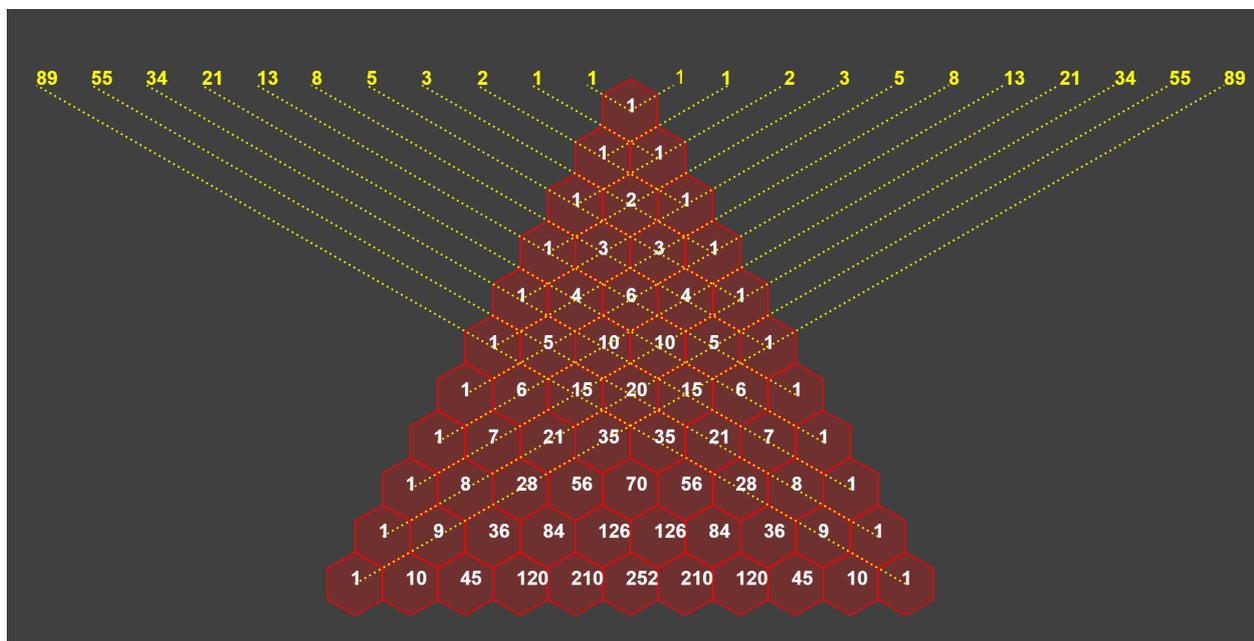
## Caderno 1: Séries de Potências e Fórmula de Taylor

---

Versão de 22 de fevereiro de 2023

### Observações

- O **Caderno 1** corresponde a um guião que será fielmente seguido ao longo das primeiras aulas. Deve portanto trazer sempre consigo uma cópia deste, em formato papel e/ou digital.
- Na próxima página vai encontrar duas tabelas: uma, contendo um conjunto minimal de exercícios recomendados da **Folha Prática 1**; uma outra tabela com **Leituras Recomendadas**.
- Nas últimas páginas deste caderno vai encontrar uma lista de **Exercícios Extra** para aprofundar o seu estudo.



*"Computational mathematics is mainly based on two ideas: Taylor series, and linear algebra".*

**Professor Lloyd Nicholas Trefethen, University of Oxford**<sup>1,2</sup>

---

<sup>1</sup>Citação retirada da página pessoal do autor – <https://people.maths.ox.ac.uk/trefethen/maxims.html>

<sup>2</sup>Imagem pode ser encontrada em <https://www.geogebra.org/m/cuavrvgt>

## Folha Prática 1

Os exercícios selecionados da **Folha Prática 1** correspondem a um conjunto mínimo (altamente) recomendado para estudo autônomo.

Tema	Exercícios
Série de Potências	1.(a), 1.(c), 1.(d), 1.(f), 1.(g), 1.(i), 1.(l) 2.
Fórmula de Taylor	3.(b), 3.(c), 3.(d), 3.(f) 4., 5., 6.
Série Geométrica	10., 11.

## Leituras Recomendadas

Para além do texto de apoio ([Almeida , 2018](#)) e dos **slides do capítulo 1**, disponíveis na plataforma Moodle (cf. [Brás \(2020\)](#)), espera-se que o aluno procure estudar por alguns dos livros que se encontram na bibliografia recomendada da disciplina. Na tabela abaixo foram catalogadas algumas sugestões de leitura<sup>3</sup>.

Bibliografia	Secção
( <a href="#">Stewart , 2013</a> )	11.8 Séries de Potências (pp. 669–673)  11.9 Representações de Funções como Séries de Potências (pp. 674–675) [Apenas séries geométricas]  11.10 Séries de Taylor e Maclaurin (pp. 679–687) [Até ao EXEMPLO 10]
( <a href="#">Apostol , 1983</a> )	11.6 Séries de potências. Círculo de convergência (pp. 498–500) [Interpretar círculo de convergência como intervalo de convergência]  11.7 Exercícios (pp. 500–501) [Apenas exercícios 1. a 16.]
( <a href="#">Knuth , 1997</a> )	1.2.6 Binomial Coefficients (pp. 52–74) [Apenas fórmulas aditivas e recursivas, envolvendo coeficientes binomiais]  1.2.7 Harmonic Numbers (pp. 75–79) [Para complementar o seu estudo de séries harmónicas, já realizado a Cálculo I]  1.2.8 Fibonacci Numbers (pp. 79–86) [Para resolver o <b>Exercício 18</b> & o <b>Exercício 19</b> ]

<sup>3</sup>Para obter a interpretação combinatória da figura da **página 1**, vide ([Knuth , 1997](#), p. 85, Exercício 16.) e a sua solução na ([Knuth , 1997](#), p. 493).

# Séries de Potências

## Revisões de Séries Numéricas

**Exemplo 1** (Série Geométrica de razão  $r$ ).

$$\sum_{n=p}^{\infty} ar^n = \frac{ar^p}{1-r} (\neq \pm\infty)$$

desde que  $|r| < 1$ .

Caso contrário, (i.e. se  $|r| \geq 1$ ) a série  $\sum_{n=p}^{\infty} ar^n$  é divergente.

**Adenda 1** (Progressão Geométrica de Razão  $r$ ). A convergência/divergência da série geométrica do **Exemplo 1** é obtida com base no limite das sucessões das somas parciais,  $(S_n)_{n \geq p}$ , definida por

$$S_n = \sum_{k=p}^n ar^k.$$

Em concreto, da igualdade  $S_n = ar^p \times \frac{1-r^{n+1}}{1-r}$  ( $r \neq 1$ ), segue que  $\sum_{n=p}^{\infty} ar^n = ar^p \times \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1-r^{n+1}}{1-r}$ .

**Para Treinar Progressões/Séries Geométricas:** Pode começar pelo **Exercício 1** & **Exercício 12**.

**Exemplo 2** (Série Harmónica (ou de Dirichlet)). Para valores de  $p \geq 1$  natural, a série numérica  $\sum_{n=p}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha}$  é convergente, desde que  $\alpha > 1$ . Caso contrário (i.e. se  $\alpha \leq 1$ ), a série  $\sum_{n=p}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha}$  é divergente.

**Adenda 2** (Função Zeta de Riemann). Para valores de  $\alpha > 1$ , a série de potências

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha}$$

corresponde à função zeta de Riemann,  $\zeta(\alpha)$  (a título de curiosidade, vide (Apostol, 1983, Exemplo 2. da p. 459) & (Knuth, 1997, p. 76)).

**Definição 1** (Série absolutamente/simplesmente convergente). A série numérica  $\sum_{n=p}^{\infty} a_n$  diz-se:

- **Absolutamente convergente** se a série dos módulos,  $\sum_{n=p}^{\infty} |a_n|$ , é convergente;
- **Simplesmente convergente** se a série dos módulos,  $\sum_{n=p}^{\infty} |a_n|$ , é divergente mas  $\sum_{n=p}^{\infty} a_n$  é convergente.

**Teorema 1 (Critério de Comparação).** Sejam  $\sum_{n=p}^{\infty} a_n$  e  $\sum_{n=p}^{\infty} b_n$  duas séries numéricas de termos positivos tais que

$$0 < a_n \leq b_n, \text{ para todo o } n \geq p \text{ natural.}$$

Então as seguintes conclusões são válidas:

- **Convergência** – Se  $\sum_{n=p}^{\infty} b_n$  é convergente, então  $\sum_{n=p}^{\infty} a_n$  também é convergente.
- **Divergência** – Se  $\sum_{n=p}^{\infty} a_n$  é divergente, então  $\sum_{n=p}^{\infty} b_n$  também é divergente.
- **Nada se pode concluir** – Se  $\sum_{n=p}^{\infty} b_n$  é divergente ou  $\sum_{n=p}^{\infty} a_n$  é convergente, nada podemos concluir quanto à natureza da série numérica a comparar.

**Exemplo 3 (Critério de Comparação).** O Teorema 1 permite-nos concluir, com base na sequência de desigualdades

$$0 < \frac{e^{-n}}{n} \leq e^{-n}, \text{ para todo o } n \in \mathbb{N}$$

e na convergência da série geométrica, de razão  $r = e^{-1}$ , dada por  $\sum_{n=1}^{\infty} e^{-n}$ , que  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{-n}}{n}$  é convergente.

Adicionalmente, as propriedades das séries de termos positivos e igualdade  $\sum_{n=1}^{\infty} e^{-n} = \frac{e}{e-1}$  permitem-nos ainda concluir que

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{-n}}{n} \leq \frac{e}{e-1}.$$

**Contra-Exemplo 1 (Critério de Comparação Inconclusivo).** Se ao invés de considerarmos a série geométrica  $\sum_{n=1}^{\infty} e^{-n}$ , tivéssemos considerado a série harmónica de ordem  $\alpha = 1$  não conseguiríamos concluir

a convergência de  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{-n}}{n}$ , via o Teorema 1. De facto, tem-se

$$0 < \frac{e^{-n}}{n} < \frac{1}{n}, \text{ para todo o } n \in \mathbb{N}.$$

Todavia, a série  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$  é divergente.

**Teorema 2 (Critério de Comparação por Passagem ao Limite).** Sejam  $\sum_{n=p}^{\infty} a_n$  e  $\sum_{n=p}^{\infty} b_n$  duas séries numéricas de termos positivos e

$$L = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n}.$$

Então as seguintes conclusões são válidas:

- **Caso  $L > 0$**  – As séries numéricas  $\sum_{n=p}^{\infty} a_n$  e  $\sum_{n=p}^{\infty} b_n$  têm a **mesma natureza**;
- **Caso  $L = 0$**  –  $\sum_{n=p}^{\infty} a_n$  é **convergente**, somente se  $\sum_{n=p}^{\infty} b_n$  é convergente;
- **Caso  $L = +\infty$**  –  $\sum_{n=p}^{\infty} b_n$  é **divergente**, somente se  $\sum_{n=p}^{\infty} a_n$  é divergente.

**Adenda 3 (Complementar ao Exemplo 3).** É também possível aplicar o **Teorema 2** para concluir a convergência da série numérica  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{-n}}{n}$  a partir da convergência da série  $\sum_{n=1}^{\infty} e^{-n}$ .

De facto,

$$L = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\frac{e^{-n}}{n}}{e^{-n}} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} = 0.$$

**Teorema 3 (Critério de Leibniz).** A série  $\sum_{n=p}^{\infty} (-1)^n a_n$  é convergente, desde que as seguintes condições sejam sempre satisfeitas:

- **Sucessão de termos positivos**  $\rightarrow a_n > 0$ , para todo o  $n \geq p$  natural;
- **Sucessão monótona decrescente**  $\rightarrow a_{n+1} \leq a_n$ , para todo o  $n \geq p$  natural;
- **Limite infinitesimal**  $\rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$ .

**Exemplo 4 (Convergência Absoluta).** A **Definição 1** e o **Exemplo 2** permitem-nos concluir que a série harmónica alternada,  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^\alpha}$ , é absolutamente convergente para valores de  $\alpha > 1$ .

**Adenda 4.** A **Definição 1** e o **Exemplo 2** não nos permitem concluir, de imediato, que a série harmónica alternada,  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^\alpha}$ , é simplesmente convergente para valores de  $\alpha \leq 1$ . Para chegarmos nesta conclusão, teremos de aplicar o critério de Leibniz (vide **Teorema 3**).

**Exemplo 5 (Convergência Simples).** O **Exemplo 2** permitem-nos ainda concluir que a série harmónica alternada,  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^\alpha}$ , é absolutamente convergente para valores de  $\alpha > 1$ .

**Para Revisão:** Leia também (Stewart, 2013, pp. 667-668) para rever as estratégias a adotar no estudo de séries numéricas. E procure resolver pelo menos o **Exercício 2** & o **Exercício 4**.

## Raio de Convergência e Domínio de Convergência

Nesta seção iremos focar o nosso estudo em séries de potências da forma

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x - c)^n, \quad (1)$$

onde  $c$  denota o centro e  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$  denota uma sucessão de números reais – vide (Almeida, 2018, Definição 1.1). Em concreto, o estudo da convergência de uma série de potência, enunciado em (Almeida, 2018, Definição 1.1) & (Almeida, 2018, Teorema 1.2), pode ser realizada algoritmicamente seguinte modo:

**Passo 0:** Calcular raio de convergência usando uma das seguintes fórmulas:

$$R = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|a_n|}{|a_{n+1}|} \quad \text{ou} \quad R = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt[n]{|a_n|}}.$$

**Passo 1:** Se  $R = +\infty$ , então a série de potências converge absolutamente em  $I = \mathbb{R}$ . Caso contrário, ir para o **Passo 2**.

**Passo 2:** Se  $R = 0$  então a série de potências apenas converge absolutamente em  $I = \{c\}$ . Caso contrário, ir para o **Passo 3**.

**Passo 3:** A série converge absolutamente no intervalo  $I = ]c - R, c + R[$  ( $0 < R < +\infty$ ). Caso contrário, ir para o **Passo 4**.

**Passo 4:** Averiguar se a série numérica converge nos pontos da forma  $x = c - R$  ou  $x = c + R$ . Incluir este(s) ponto(s) ao intervalo  $I$  em caso de convergência.

**Notação 1 (Termos nulos da série de potências).** Quando escrevermos  $\sum_{n=p}^{\infty} a_n(x - c)^n$  ( $p \in \mathbb{N}$ ) ao invés da fórmula (1), estamos a assumir implicitamente que os primeiros  $p$  termos da série de potências dada são nulos, i.e.

$$a_0 = a_1 = \dots = a_{p-1} = 0.$$

**Adenda 5 (Vide Observação 1.2 de (Almeida, 2018)).** Aplicação direta do critério da razão/raiz à série de potências  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x - c)^n$  permite-nos concluir que esta

- Converge absolutamente se, e só se

$$\frac{1}{R}|x - c| < 1 \iff |x - c| < R;$$

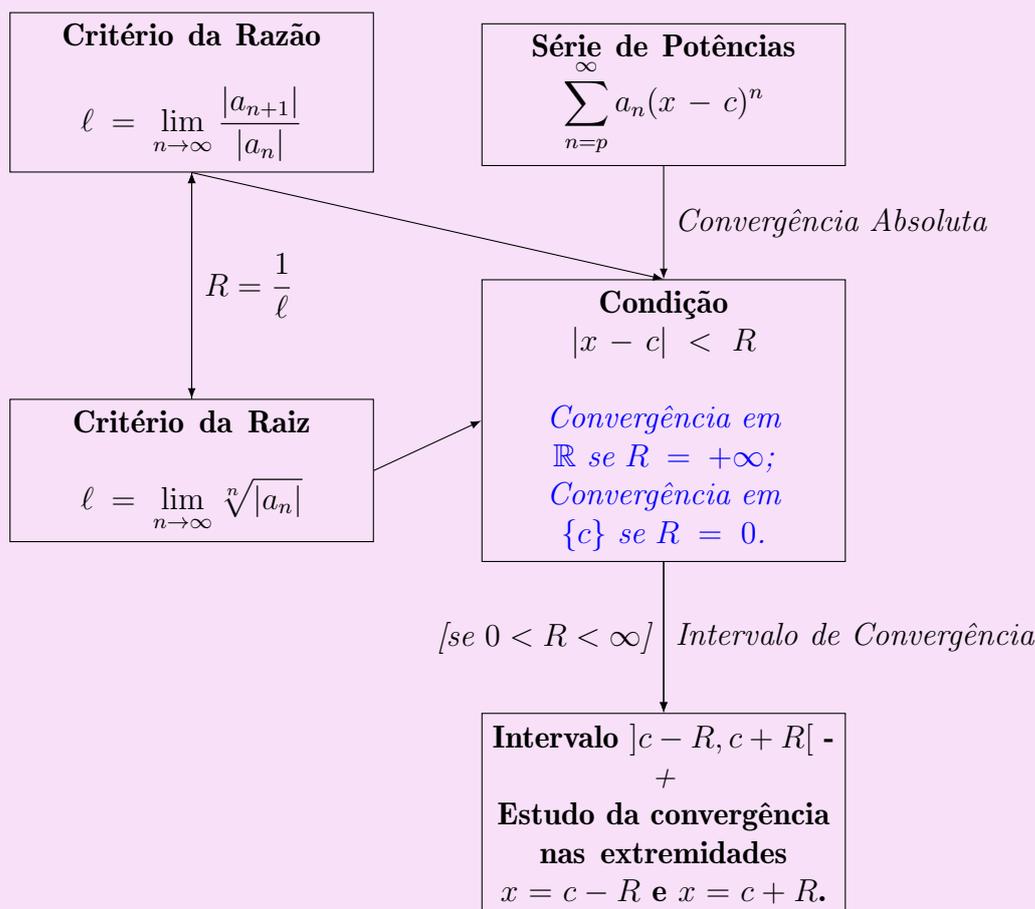
- Diverge se, e só se

$$\frac{1}{R}|x - c| > 1 \iff |x - c| > R;$$

- Nada se pode concluir quando

$$\frac{1}{R}|x - c| = 1 \iff |x - c| = R.$$

**Diagrama 1 (Cálculo de raio/intervalo de convergência).** O diagrama abaixo dá-nos uma representação pictórica da Observação 1.2 de (Almeida, 2018).



**Adenda 6 (vide Exercício 2. da Folha Prática 1).** No caso de  $0 < R < \infty$ , podemos facilmente verificar que a série dos módulos de (1) coincide nas extremidades  $c \pm R$  ( $|x - c| = R$ ), em virtude da igualdade

$$\sum_{n=0}^{\infty} |a_n(x - c)^n| = \sum_{n=0}^{\infty} |a_n| |x - c|^n.$$

Esta identidade permite-nos ainda concluir o seguinte:

1. Se (1) é convergente em  $]c - R, c + R[$  ou em  $]c - R, c + R]$ , então (1) converge simplesmente numa das extremidades (porquê?);
2. Se (1) é absolutamente convergente em uma das extremidades,  $c - R$  resp.  $c + R$ , então o intervalo de convergência é dado por  $]c - R, c + R[$ .

Com base na fórmula geral da série geométrica, introduzida no **Exemplo 1**, podemos criar vários exemplos para além da célebre série de potências  $\sum_{n=0}^{\infty} x^n$ , mencionada vários livros de texto (vide p.e. (Almeida, 2018, Exemplo 1.1)).

**Exemplo 6 (Séries de Potências vs. Séries Geométrica).** A série de potências  $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n(x - 1)^n$  é absolutamente no intervalo  $]0, 2[$ .

Adicionalmente, o raio de convergência é 1 e o domínio de convergência é o intervalo aberto  $]0, 2[$  ( $|x - 1| < 1$ ).

**Mais adiante:** Iremos verificar que série de potências do **Exemplo 6** corresponde à **série geométrica da função**  $\frac{1}{x}$  em torno de  $c = 1$ .

**Adenda 7.** Os pontos  $x = 0$  (caso  $x - 1 = -1$ ) e  $x = 2$  (caso  $x - 1 = 1$ ) não pertencem ao intervalo de convergência da série de potências  $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (x - 1)^n$ , dado as séries numéricas

$$\sum_{n=0}^{\infty} 1 \quad \text{resp.} \quad \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n$$

serem ambas divergentes (Porquê?).

**Exemplo 7 (Análogo ao Exemplo 1.3 de (Almeida, 2018)).** À semelhança do **Exemplo 6**, é também possível demonstrar que a série de potências  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} (x - 1)^n$  converge absolutamente no intervalo  $]0, 2[$  ( $|x - 1| < 1$ ).

Para o caso de  $x = 0$  ( $x - 1 = -1$ ), segue a série de termos negativos

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{-1}{n} := - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n},$$

com a mesma natureza da série harmónica de ordem  $\alpha = 1$ , (vide **Exemplo 2**) – é divergente.

No caso de  $x = 2$ , segue que a série alternada  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n}$  – que tem a mesma natureza da série  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$  – está nas condições do critério de Leibniz (verifique todas as condições do **Teorema 3**) pelo que a série de potências dada é simplesmente convergente para  $x = 2$ .

**Em suma:** o intervalo de convergência corresponde ao intervalo semi-aberto  $]0, 2]$ .

**Mais adiante:** Iremos verificar que série de potências do **Exemplo 7** corresponde à **série de Taylor da função**  $\ln(x)$  em torno de  $c = 1$ .

**Exemplo 8 (Análogo ao Exemplo 1.2 de (Almeida, 2018)).** Considere-se agora a série de potências, dada por  $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2^{2n} n!} x^{2n}$ .

Note-se que esta série não se encontra no formato usual de série potências, uma vez que os termos gerais, associados às potências de ordem ímpar ( $x^{2n+1}$ ) foram omitidas. Neste caso, será mais recomendável adotar o argumento invocado em (Almeida, 2018, Observação 1.2) para calcular o raio/domínio de convergência da série de potências por aplicação direta do critério da razão.

Em concreto, tome-se  $f_n(x) = \frac{(-1)^n}{2^{2n} n!} x^{2n}$ . Logo a série de potências dada é absolutamente convergente se, e só se

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|f_{n+1}(x)|}{|f_n(x)|} < 1.$$

Após realizar alguns cálculos auxiliares, podemos concluir que a série dada é absolutamente convergente em  $\mathbb{R}$ , em virtude de:

$$1. \frac{|f_{n+1}(x)|}{|f_n(x)|} = \frac{x^2}{2(n+1)} \quad (\text{verifique}); \quad 2. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x^2}{2(n+1)} = 0.$$

**Mais adiante:** Iremos verificar que série de potências do **Exemplo 8** corresponde à **série de Maclaurin da função**  $e^{-\frac{x^2}{2}}$ . De momento, não se pretende avançar muito para além do **Exercício 17** – um excelente exercício para visitar conceitos de primitivação e integração, abordados em Cálculo I.

**Exemplo 9 (Complementar ao Exemplo 1 da página 669 de (Stewart , 2013)).** Por fim, considere-se a série de potências, dada por  $\sum_{n=1}^{\infty} n^n x^{2n}$ .

Pode-se facilmente verificar, por aplicação direta do critério de Cauchy, que para  $f_n(x) = n^n x^{2n}$  se tem

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|f_n(x)|} = \lim_{n \rightarrow \infty} n x^2 = +\infty,$$

para todo o  $x \neq 0$ .

Neste caso, a série converge apenas absolutamente quando  $x = 0$  e, por conseguinte, o raio de convergência é nulo (i.e.  $R = 0$ ).

**Contra-Exemplo 2 (Cálculo do Raio de Convergência).** Na série de potências da forma

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^n}{n!} x^{2n+1}$$

aparecem apenas representados os termos ímpares ( $x^{2n+1}$ ), pelo que é legítimo assumir que o primeiro termo da série, assim como os termos pares são todos nulos.

Neste caso, para  $a_n = \frac{n^n}{n!}$  a aplicação do critério da razão permite-nos concluir que

$$\ell = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{(n+1)^{n+1}}{(n+1)!}}{\frac{n^n}{n!}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{n+1}{n} \right)^n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left( 1 + \frac{1}{n} \right)^n = e.$$

No entanto,  $\frac{1}{\ell} = \frac{1}{e}$  não corresponde ao valor do raio de convergência. De facto, se aplicarmos a estratégia delineada no **Diagrama 2** (que se encontra a seguir), podemos concluir que  $\frac{1}{\sqrt{e}}$  é o valor do raio de convergência<sup>a</sup>.

Esta conclusão pode ser obtida a partir da sequência de equivalências, envolvendo a sucessão de funções  $f_n(x) = \frac{n^n}{n!} x^{2n+1}$ :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|f_{n+1}(x)|}{|f_n(x)|} < 1 \iff \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{n+1}{n} \right)^n |x|^2 < 1 \iff e|x|^2 < 1 \iff |x|^2 < \frac{1}{e} \iff |x| < \frac{1}{\sqrt{e}}.$$

<sup>a</sup>Aplicação do critério de D'Alembert permite-nos concluir que a série converge absolutamente em  $x = \pm \frac{1}{\sqrt{e}}$ , uma vez que  $\left| \pm \frac{1}{\sqrt{e}} \right| = \frac{1}{\sqrt{e}} < \frac{1}{\sqrt{e}}$ .

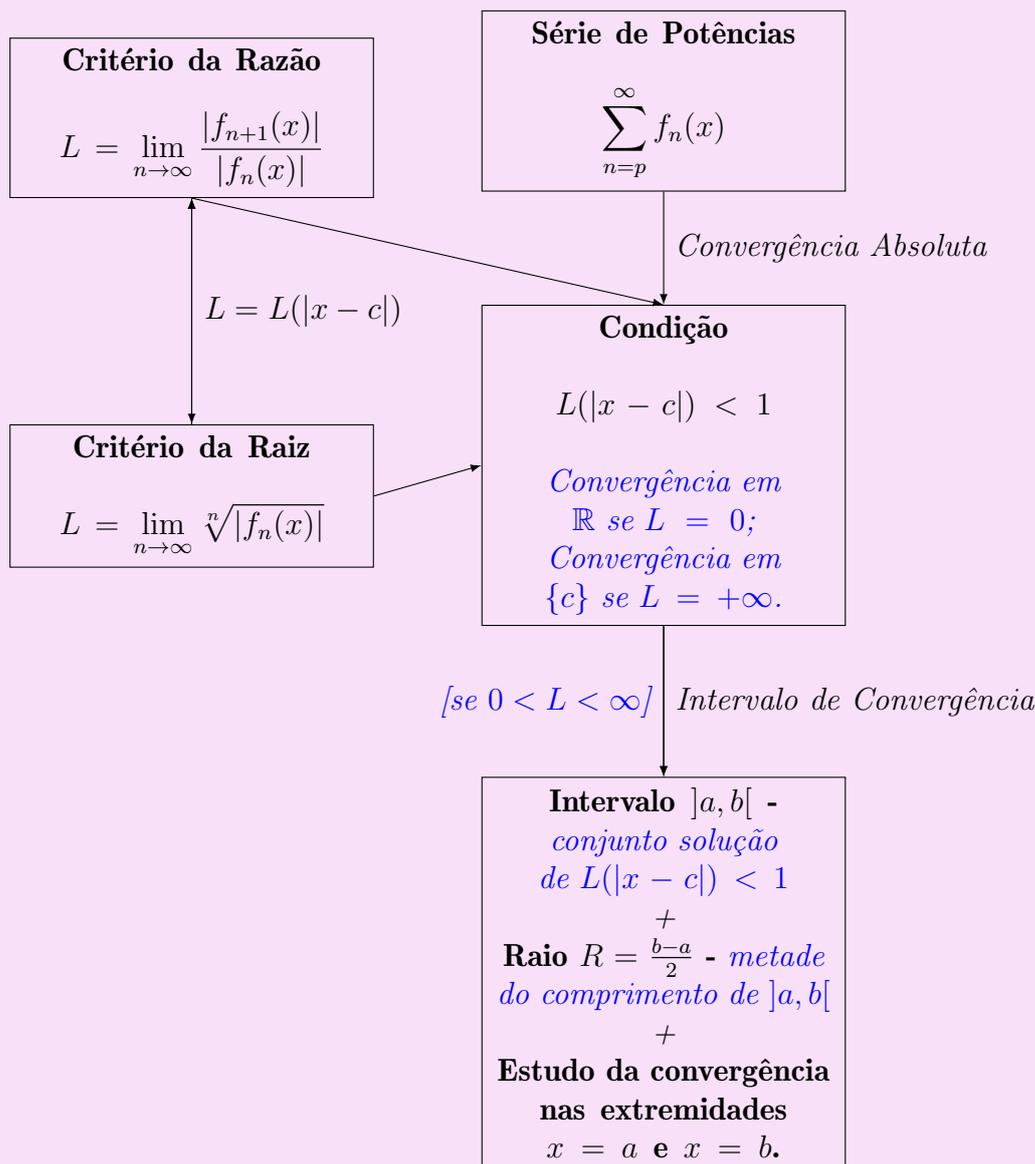
**Contra-Exemplo 3 (Complementar ao Exemplo 2).** No caso da série de potências  $\sum_{n=0}^{\infty} \left( \frac{n}{n+3} \right)^{n^2} x^{2n}$  pode ainda chegar nas seguintes conclusões interessantes, após aplicação do Critério de Cauchy:

$$1. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\left| \left( \frac{n}{n+2} \right)^{n^2} \right|^{\frac{1}{n}}} = e^2 \quad \& \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \left( \frac{n}{n+3} \right)^{n^2} x^{2n} \right|^{\frac{1}{n}} = e^{-2} |x|^2;$$

2. A série diverge no caso de  $|x| = e^2$ , dado que  $e^{-2}(e^2)^2 = e^2 > 1$ .

**Adenda 8 (Aplicação do Critério da Razão/Raiz).** O Exemplo 8 & Exemplo 9, assim como o Contra-Exemplo 2 & Contra-Exemplo 3 mostram-nos que o domínio e o raio de convergência das respetivas séries de potências não requer o cálculo prévio do raio de convergência e do domínio de convergência – apenas aplicação direta do critério da razão ou da raiz, tal como ilustrado de seguida no **Diagrama 2**.

**Diagrama 2 (Estudo Genérico de Série de Potências).** O diagrama abaixo resume, de um modo genérico, a estratégia a ser utilizada para estudo de séries de potências.



**A ter em linha de conta:** Ao resolver os itens do **Exercício 6** e, mais adiante, o **Exercício 15**, pode adotar qualquer uma das estratégias mencionadas. Apenas terá de ter [algum] cuidado que, no caso de adotar a primeira estratégia – assente no cálculo explícito do raio de convergência da série – nos termos da série de potências. A saber:

- Terão de aparecer **sempre** potências da forma  $(x - c)^n$  e não potências  $(x - c)^{2n}$ ,  $(x - c)^{2n+1}$  entre outras (cf. (Brás, 2020, slide 8/19)).
- No caso de aparecerem potências da forma  $(mx + b)^n$ , terá de rescrever o termo germe geral de modo a separar as potências da forma  $(x - c)^n$  da sucessão  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ .

# Fórmula de Taylor

## Resultados Teóricos e Exemplos

**Definição 2 (Polinómio de Taylor de ordem  $n$ ).** Seja  $f$  uma f.r.v.r. admitindo derivadas finitas até à ordem  $n \in \mathbb{N}$  num dado ponto  $c \in \mathbb{R}$ . Ao polinómio

$$T_c^n(f(x)) := \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(c)}{k!} (x - c)^k$$

chamamos polinómio de Taylor de ordem  $n$  da função  $f$  no ponto  $c$ .

**Notação 2 (Polinómio de Maclaurin).** Para o caso de  $c = 0$ , iremos designar  $T_0^n(f(x))$  por polinómio de Maclaurin de ordem  $n$  de  $f$ .

**Teorema 4 (Teorema de Taylor Infinitesimal).** Sejam  $n \in \mathbb{N}_0$  e  $f$  uma função real com derivadas contínuas até à ordem  $n + 1$  num intervalo  $I$  e  $c \in I$ . Então, para todo o  $x \in I \setminus \{c\}$ , tem-se

$$f(x) = T_c^n(f(x)) + R_c^n(f(x)),$$

onde:

1.  $T_c^n(f(x))$  é o polinómio de Taylor de ordem  $n$  de  $f$  em  $c$ .
2.  $\lim_{x \rightarrow c} \frac{R_c^n(f(x))}{(x - c)^n} = 0$ .

Além disso,  $T_c^n(f(x))$  é o único polinómio de grau  $n$  tal que as condições acima são satisfeitas.

**Note ainda que** no caso de  $f^{(n+1)}$  existir, é ainda possível estimar o valor de

$$R_c^n(f(x)) = f(x) - T_c^n(f(x))$$

com recurso ao resto de Lagrange de ordem  $n$ , tal qual descrito no **Teorema 5**.

**Teorema 5 (Teorema de Taylor com Resto de Lagrange).** Sejam  $n \in \mathbb{N}_0$  e  $f$  uma função real com derivadas contínuas até à ordem  $(n + 1)$  num intervalo  $I$  e  $c \in I$ . Então, para todo o  $x \in I \setminus \{c\}$ , existe  $\theta$  entre  $c$  e  $x$  tal que

$$f(x) = T_c^n(f(x)) + R_c^n(f(x)),$$

onde:

1.  $T_c^n(f(x))$  é o polinómio de Taylor de ordem  $n$  de  $f$  em  $c$ .
2.  $R_c^n(f(x)) = \frac{f^{(n+1)}(\theta)}{(n + 1)!} (x - c)^{n+1}$  é o resto de Lagrange de ordem  $n$  de  $f$  em  $c$ .

**Exemplo 10 (Polinómio de Taylor vs. Polinómio de Grau  $n$ ).** Após resolver o **Exercício 8** (fortemente recomendado) poderá facilmente chegar na conclusão, via a identidade binomial<sup>a</sup>

$$x^k = \sum_{j=0}^n \binom{k}{j} c^j (x-c)^{k-j}$$

e argumentos de linearidade, que o polinómio de grau  $n$ , dado por

$$P_n(x) = a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n := \sum_{k=0}^n a_kx^k \quad (a_n \neq 0),$$

coincide com o polinómio de Taylor de ordem  $n$ . Nas condições do **Teorema 4**

1. A igualdade  $T_c^n(P_n(x)) = P_n(x)$  é satisfeita, para todo o  $c \in \mathbb{R}$ ;
2. A condição limite  $\lim_{x \rightarrow c} \frac{R_c^n(f(x))}{(x-c)^n} = 0$  é sempre satisfeita, uma vez que  $R_c^n(P_n(x)) = 0$ , para todo o  $c \in \mathbb{R}$ .

---

<sup>a</sup>Observe que  $x^k = ((x-c) + c)^k$ .

**Exemplo 11 (Complementar ao Exercício 3. (a) da Folha 1).** Para o caso da função  $f$ , definida por  $f(x) = x^3 + 2x + 1$  tem-se que

- i)  $f(-1) = (-1)^3 + 2(-1) + 1 = -2$ ;
- ii)  $f'(x) = 3x^2 + 2 \implies f'(-1) = 5$ ;
- iii)  $f''(x) = 6x \implies f''(-1) = -6$
- iv)  $f'''(x) = 6 \implies f'''(-1) = 6$ .

Logo,

$$\begin{aligned} T_{-1}^3(f(x)) &= f(-1) + f'(-1)(x+1) + \frac{f''(-1)}{2!}(x+1)^2 + \frac{f'''(-1)}{3!}(x+1)^3 \\ &= -2 + 5(x+1) - 3(x+1)^2 + (x+1)^3. \end{aligned}$$

corresponde à representação canónica do polinómio de Taylor de ordem 3, em torno do ponto  $c = -1$ .

Após simplificações, envolvendo o binómio de Newton<sup>a</sup>, pode concluir que este coincide com  $f(x)$  – tal como já tinha sido mencionado no **Exemplo 10**.

---

<sup>a</sup>A capa deste caderno dá-nos uma interpretação combinatória dos coeficientes binomiais que aparecem, na representação de  $(x+1)^2 = x^2 + 2x + 1$  (linha 2 do triângulo de Pascal) e de  $(x+1)^3 = x^3 + 3x^2 + 3x + 1$  (linha 3 do triângulo de Pascal).

**Adenda 9.** O **Teorema 5** também é aplicável ao **Exemplo 10**, dado que o resto de Lagrange de ordem  $n$  ser sempre nulo, em virtude de  $P_n^{(n+1)}(x) = 0$ , para todo o  $x \in \mathbb{R}$ .

Esta última observação permite-nos ainda mostrar que  $P_n^{(k)}(x) = 0$ , para valores de  $k \geq n + 1$  (**polinómio nulo**). Portanto:

$$T_c^n(f(x)) = T_c^k(f(x)) = 0, \quad \text{para todo o } k \geq n + 1.$$

**Contra-Exemplo 4 (Complementar ao Exercício 3. (a) da Folha 1).** Da igualdade

$$\frac{d^k}{dx^k}(x^3 + 2x + 1) = 0,$$

para valores de  $k \geq 4$ , pode facilmente verificar que

$$T_0^3(x^3 + 2x + 1) = x^3 + 2x + 1 = T_0^k(x^3 + 2x + 1), \text{ para todo o } k \geq 4.$$

Todavia  $T_0^2(x^3 + 2x + 1) = T_0^1(x^3 + 2x + 1) = 1 + 2x$ . Pode-se ainda concluir<sup>a</sup> que  $T_c^k(P_n(x))$  **pode ser diferente** de  $T_c^n(P_n(x))$  no caso de  $k < n$  sendo  $P_n$  é polinómio de grau  $n$ , definido no **Exemplo 10**.

Para interpretar geometricamente este contra-exemplo, assim como o **Exemplo 11**, veja o link

<https://www.geogebra.org/calculator/csms266b>.

<sup>a</sup>Geometricamente, a igualdade  $T_0^2(x^3 + 2x + 1) = T_0^1(x^3 + 2x + 1) = 1 + 2x$  diz-nos que os polinómios de Maclaurin de ordem 1 e 2 coincidem com a equação da reta tangente ao gráfico de  $y = x^3 + 2x + 1$  no ponto  $(0, 1)$ .

**Exemplo 12 (Polinómio de Taylor de uma função por ramos).** Considere-se agora a sucessão de funções por ramos  $(f_m(x))_{m \in \mathbb{N}}$ , definida por

$$f_m(x) = \begin{cases} x^m, & x \geq 0 \\ -x^m, & x < 0 \end{cases}$$

No caso da função  $f_{n+1}$  ( $n \in \mathbb{N}_0$ ), tem-se que esta tem derivadas contínuas até à ordem  $n$ . E que estas podem ser representadas, via a igualdade

$$f_{n+1}^{(k)}(x) = \frac{(n+1)!}{(n+1-k)!} f_{n+1-k}(x), \quad k = 0, 1, \dots, n.$$

Após alguns cálculos, segue que

$$T_c^n(f(x)) = \sum_{k=0}^n \binom{n+1}{k} f_{n+1-k}(c)(x-c)^k$$

é o polinómio de Taylor de ordem  $n$  de  $f$  em torno de  $c$ .

No caso particular de  $c = 0$ , tem-se que:

1.  $T_0^n(f_{n+1}(x)) = 0$  é o polinómio de Maclaurin de ordem  $n$  de  $f_{n+1}$ .
2.  $T_0^n(f_{n+1}(x)) = 0$  é o único polinómio de Maclaurin de ordem  $n$  de  $f_{n+1}$ , uma vez que

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{R_0^n(f_{n+1}(x))}{x^n} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f_{n+1}(x)}{x^n} = \lim_{x \rightarrow 0} |x| = 0.$$

**Contra-Exemplo 5 (Falha na Aplicação do Teorema 5).** Na figura disponível em

<https://www.geogebra.org/calculator/rr732gfx>

encontra-se representada a função  $f_{n+1}$  do **Exemplo 12** e a função derivada de ordem  $n$ ,  $f^{(n)}$ , dada por  $f^{(n)}(x) = (n+1)! |x|$ .

Para este caso:

1. Não nos é possível aplicar o **Teorema 5** para estimar  $R_c^n(f(x))$ , uma vez que a função módulo não admite derivada no ponto  $c = 0$ .
2. Pelo mesmo motivo, também se demonstra que não é possível determinar o polinómio de Maclaurin de ordem  $n+1$  de  $f_{n+1}$ ,  $T_0^{n+1}(f_{n+1}(x))$ .

**Exemplo 13 (Polinómio de Taylor vs. Progressão Geométrica).** Do **Exemplo 10** e da **Adenda 1** podemos facilmente concluir que, para valores de  $x \neq 1$ , o polinómio de Taylor de ordem  $n$ , em torno do ponto  $c$ , admite sempre a representação em forma de fração racional

$$1 + x + \dots + x^n = \frac{1 - x^{n+1}}{1 - x},$$

ou seja, a igualdade  $T_c^n\left(\frac{1 - x^{n+1}}{1 - x}\right) = 1 + x + \dots + x^n$  é uma consequência imediata do facto dos polinómios  $1 - x^{n+1}$  e  $1 - x$  serem divisíveis.

**Adenda 10 (Derivadas de ordem  $k$  vs. Progressão Geométrica).** Com base na igualdade

$$\frac{1}{1 - x} = \frac{1 - x^{n+1}}{1 - x} + \frac{x^{n+1}}{1 - x}$$

é ainda possível concluir que  $T_0^n\left(\frac{1}{1 - x}\right) = 1 + x + \dots + x^n$  é o **único polinómio de Maclaurin** de ordem  $n$  de  $\frac{1}{1-x}$ , em virtude de

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{x^{n+1}}{1-x}}{x^n} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{1-x} = 0.$$

Este facto permite-nos concluir que as derivadas de ordem  $k$  de  $\frac{1}{1-x}$  em  $c = 0$  são iguais a  $k!$ , isto é

$$\left[\frac{1}{1-x}\right]_{x=0}^{(k)} = k!, \quad k = 0, 1, \dots, n.$$

**Mais adiante:** Iremos verificar, via a representação em série geométrica de  $\frac{1}{1-x}$ , que esta admite derivadas de qualquer ordem em  $c = 0$ .

**Exemplo 14 (Função Exponencial).** Pode-se facilmente verificar que a função exponencial  $e^x$ , satisfazem a equação  $(e^x)' = e^x$ . Logo, podemos facilmente concluir o seguinte

1.  $T_0^n(e^x) = \sum_{k=0}^n \frac{x^k}{k!}$  é o polinómio de Maclaurin ordem  $n$  de  $e^x$ .

2.  $R_0^n(e^x) = \frac{e^\theta}{(n+1)!} x^{n+1}$  ( $\theta$  entre 0 e  $x$ ) é o resto de Lagrange de ordem  $n$ .

## Fórmula de Taylor vs. Regra de L'Hôpital

O próximo resultado, que também decorre do **Teorema 4** (ou do **Teorema 5**), permite-nos calcular limites associados a indeterminações do tipo  $\frac{0}{0}$ .

**Teorema 6 (Regra de L'Hôpital).** *Sejam  $f$  e  $g$  duas funções com derivadas contínuas até à ordem  $n$  num intervalo  $I$  e  $c \in I$ . Adicionalmente, se as seguintes condições são satisfeitas:*

- (a)  $f^{(k)}(c) = g^{(k)}(c) = 0$ , para todo o  $k = 0, 1, \dots, n - 1$ ;
- (b) Pelo menos uma das derivadas  $f^{(n)}(c)$  ou  $g^{(n)}(c)$  é não nula.
- (c)  $g(x) \neq 0$  em  $I \setminus \{c\}$ .

tem-se que

$$\begin{cases} \lim_{x \rightarrow c} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f^{(n)}(c)}{g^{(n)}(c)}, & g^{(n)}(c) \neq 0 \\ \lim_{x \rightarrow c} \left| \frac{f(x)}{g(x)} \right| = +\infty, & g^{(n)}(c) = 0 \end{cases}$$

**Adenda 11 (Regra de L'Hôpital).** *Note-se que, nas condições do **Teorema 6**, a fórmula de Taylor com resto de Lagrange (vide **Teorema 4**) permite-nos concluir que*

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{f^{(n)}(x)}{n!} (x - c)^n + R_c^n(f(x)), \\ g(x) &= \frac{g^{(n)}(x)}{n!} (x - c)^n + R_c^n(g(x)). \end{aligned}$$

Pelas duas fórmulas anteriores, e pelas condições

$$\lim_{x \rightarrow c} \frac{R_c^n(f(x))}{(x - c)^n} = 0 = \lim_{x \rightarrow c} \frac{R_c^n(g(x))}{(x - c)^n}$$

segue que

$$\lim_{x \rightarrow c} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow c} \frac{\frac{f(x)}{(x-c)^n}}{\frac{g(x)}{(x-c)^n}} = \lim_{x \rightarrow c} \frac{f^{(n)}(x)}{g^{(n)}(x)} \quad [\text{após simplificações}].$$

**Esta conclusão também é válida nas condições do **Teorema 5** (justifique o porquê).**

**Mais adiante:** Pretende-se que aplique o **Teorema 6** na resolução do **Exercício 10**. Em particular, a fórmula de Taylor  $T_c^n(f(x)) = \frac{f^{(n)}(x)}{n!} (x - c)^n$  que resulta da construção obtida na **Adenda 11**.

## Polinómio de Taylor vs. Aproximação Polinomial

Nesta subsecção iremos dar alguns exemplos de aplicabilidade da fórmula de Taylor, introduzida na **Definição 2** assim como da majoração do erro de Lagrange, obtido no **Teorema 5**. Começemos por observar o seguinte resultado que decorre de aplicação direta do Teorema de Weierstraß [para funções contínuas]:

**Corolário 1 (do Teorema 5).** Suponhamos que a derivada de ordem  $n + 1$  de  $f$ ,  $f^{(n+1)}$ , é contínua no intervalo  $[a, b]$ , então existe uma constante  $M := \max_{x \in [a, b]} |f^{(n+1)}(x)|$  tal que para todo o  $x \in [a, b]$ ,

$$|R_c^n(f(x))| \leq \frac{M}{(n+1)!} |x - c|^{n+1} \leq \frac{M}{(n+1)!} (b - a)^{n+1}.$$

**Exemplo 15 (Aproximação Racional do Número de Euler).** É fácil de verificar, com base no **Exemplo 14**, que

$$e \approx \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!}.$$

Se escolhermos  $x$  no intervalo  $[0, 1]$ , tem-se que

$$|R_0^n(e^x)| \leq \frac{e^\theta}{(n+1)!} |x|^{n+1} \leq \frac{e}{(n+1)!}.$$

Para mais detalhes, vide (Almeida, 2018, Exemplo 1.13).

**Nesta fase do seu estudo** espera-se que tenha entendido várias ideias basilares por detrás do cálculo do polinómio de Taylor. Uma delas, que resulta do **Teorema 4**, diz-nos que todas as derivadas de ordem  $k$  ( $0 \leq k \leq n$ ) de  $f$  e do polinómio  $P_n(x - c) := T_n^c(f(x))$  terão de coincidir.

Para tal, terá de se assumir as seguintes  $n+1$  condições de interpolação são satisfeitas para polinómios  $P_n$  da forma do **Exemplo 10**:

$$f^{(k)}(c) = P_n^{(k)}(0), \quad \text{para todos os } 0 \leq k \leq n. \quad (2)$$

Esta última condição não nos garante apenas que o polinómio de Taylor de um polinómio  $P_n$  é o próprio polinómio – independentemente da escolha de  $c \in I$ . Outra conclusão, que advém do conjunto de condições (2), é que o gráfico do polinómio de Taylor aproxima fielmente o gráfico da função  $f$  [numa vizinhança  $c \in I$ ] – que advém da condição de limite  $\lim_{x \rightarrow c} \frac{R_c^n(f(x))}{(x - c)^n} = 0$ , subjacente ao **Teorema 4**.

**Exemplo 16 (Polinómio de Maclaurin da Função Logística).** No exemplo criado em <https://www.geogebra.org/calculator/jmrz9zf6>, considerou-se o polinómio de Maclaurin da função logística, dada por  $f(x) = \frac{2}{1 + e^{-2x}}$ . Neste, pode verificar-se que:

- (a) O polinómio de Maclaurin de ordem 1 de  $f$  coincide com  $T_0^1(e^x)$  do **Exemplo 14**;
- (b) Para diferentes ordens,  $n$ , o gráfico do polinómio de Maclaurin assemelha-se ao gráfico de  $f$  numa vizinhança de  $(0, 1)$  – **ponto de inflexão do gráfico de  $f$** ;
- (c) Ao contrário do **Exemplo 14**, basta apenas considerar os polinómios de Taylor de ordem ímpar, em virtude de  $f$  das derivadas de ordem par ( $n = 2k$ ) de  $f$ , em  $c = 0$ , serem todas nulas.

**Adenda 12 (Condições de Interpolação).** Da condição (2), seguem ainda as seguintes conclusões:

i) Os coeficientes de ordem  $k$  do polinómio  $P_n$  são unicamente determinados pela fórmula

$$a_k = \frac{f^{(k)}(c)}{k!}.$$

ii) A regra de L'Hôpital, abordada no **Corolário 6**, conduz-nos à equivalência<sup>a</sup>

$$\lim_{x \rightarrow c} \frac{R_c^n(f(x))}{x^n} = 0 \iff \left[ \frac{d^k}{dx^k} R_c^n(f(x)) \right]_{x=0} = 0 \quad (k = 0, 1, \dots, n).$$

<sup>a</sup>Generalização da equivalência *diferenciabilidade de  $f \iff$  existência de reta tangente ao gráfico de  $f$ .*

Após estudar os próximos dois exemplos já pode resolver o **Exercício 9**, e depois, o **Exercício 11**. Mais adiante, e se já sentir confortável na manipulação de coeficientes binomiais, já pode arriscar resolver o **Exercício 16** & o **Exercício 17**.

**Exemplo 17 (Aproximação Racional do Número de Ouro).** *Suponha que pretende obter uma aproximação racional para o célebre número de ouro  $\phi = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$ .*

*Para tal, comecemos por calcular o polinómio de Taylor de ordem  $n$  da função  $f$  definida, para valores de  $x \geq 0$ , por  $f(x) = \frac{1 + \sqrt{x}}{2}$ , em torno de  $c = 4$ . Para tal, observe que*

$$i) f(4) = \frac{1 + \sqrt{4}}{2} = \frac{3}{2}$$

$$ii) f'(x) = \frac{1}{4}x^{-\frac{1}{2}} \implies f'(4) = \frac{1}{8} \implies T_4^1(f(x)) = \frac{3}{2} + \frac{1}{8}(x - 4)$$

$$iii) f''(x) = -\frac{1}{8}x^{-\frac{3}{2}} \implies f''(4) = -\frac{1}{64} \implies T_4^2(f(x)) = \frac{3}{2} + \frac{1}{8}(x - 4) - \frac{1}{128}(x - 4)^2.$$

Portanto:

$$(a) \text{ Aproximação linear de } \phi \text{ por } T_4^1(f(4)): \phi \approx \frac{3}{2} + \frac{1}{8} = \frac{13}{8}.$$

$$(b) \text{ Aproximação Quadrática de } \phi \text{ por } T_4^2(f(4)) \phi \approx \frac{3}{2} + \frac{1}{8} - \frac{1}{128} = \frac{207}{128}.$$

Com base no exemplo numérico, criado em <https://www.geogebra.org/m/tcnpz8fh>, poderemos ainda observar o seguinte:

(a) **Aproximação linear de  $\phi$  por  $T_4^1(f(4))$**  dá-nos um erro de aproximação inferior a  $10^{-2}$ .

(b) **Aproximação Quadrática de  $\phi$  por  $T_4^2(f(4))$**  dá-nos um erro de aproximação inferior a  $10^{-3}$ .

(c) O erro de aproximação diminui se considerarmos aproximação por polinómios de Taylor de ordem superior 2. Pode-se ainda verificar que:

$$i) \text{ Para } n = 5, \text{ obtemos}^a T_4^5(f(4)) = \frac{424159}{262144} \text{ e } |f(5) - T_4^5(f(5))| < 0.5 \times 10^{-6}.$$

$$ii) \text{ Para } n = 18, \text{ o GeoGebra já assume } |f(5) - T_4^{18}(f(5))| \approx 0.$$

Na disciplina de Métodos Numéricos terá a oportunidade de aprofundar esta e outras questões relacionadas com este tipo de exemplos.

<sup>a</sup> $n = 5$  é o valor máximo para o qual o GeoGebra ainda apresenta a solução na forma de fração irredutível.

**Exemplo 18 (Majoração do Erro de Aproximação de  $\phi$ ).** Com base na derivação da função potência, podemos demonstrar por indução<sup>a</sup> em  $n \in \mathbb{N}$  que

$$(x^{-\frac{1}{2}})^{(n)} = (-1)^n \left(\frac{1}{2}\right)_n x^{-\frac{1}{2}-n},$$

onde  $(a)_n = a(a+1)(a+3)\dots(a+n-1)$  denota o símbolo de Pochhammer.

Desta última fórmula, segue que a derivada de ordem  $n+1$  da função<sup>b</sup>  $f(x) = \frac{1+\sqrt{x}}{2}$ , é dada por

$$f^{(n+1)}(x) = \frac{1}{4}(x^{-\frac{1}{2}})^{(n)} = \frac{(-1)^n}{4} \left(\frac{1}{2}\right)_n x^{-\frac{1}{2}-n},$$

Adicionalmente, do facto de  $f^{(n+1)}$  ser contínua em  $[4, 5]$  garante-nos, após alguns cálculos, que

$$|R_4^n f(x)| \leq \frac{1}{(n+1)!} \max_{x \in [4,5]} |f^{(n+1)}(x)| = \frac{1}{8 \cdot 4^n (n+1)!} \left(\frac{1}{2}\right)_n.$$

<sup>a</sup>Primeiro, terá de verificar que a fórmula de derivação dada é verdadeira para  $n = 1$ . De seguida terá de demonstrar o passo indutivo  $n = k \rightarrow n = k+1$ , via demonstração da implicação

$$(x^{-\frac{1}{2}})^{(k)} = (-1)^k \left(\frac{1}{2}\right)_k x^{-\frac{1}{2}-k} \implies (x^{-\frac{1}{2}})^{(k+1)} = (-1)^{k+1} \left(\frac{1}{2}\right)_{k+1} x^{-\frac{1}{2}-k-1}.$$

<sup>b</sup>Observe que  $f^{(n+1)}(x) := (f^{(n)}(x))' \& f'(x) = \frac{1}{2}(\sqrt{x})'$ .

## Série de Taylor

Os resultados, exemplos e contra-exemplo, a abordar ao longo desta secção, estão correlacionados com o conceito de *função analítica* – omnipresente em vários livros de cálculo. De momento, a nossa abordagem ao conceito de analiticidade irá resumir-se à informação que consta em (Brás, 2020, slide 15/19)).

**Teorema 7 (Existência da Série de Taylor).** *Sejam  $I$  um intervalo,  $c \in I$  e  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  uma função com derivadas finitas de qualquer ordem em  $I$ . Então, para todo o  $x \in \mathbb{R}$  tem-se que*

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(c)}{n!} (x-c)^n \quad \text{se, e só se, } \lim_{n \rightarrow \infty} R_c^n(f(x)) = 0$$

**Adenda 13.** O Teorema 4 e Teorema 7 são resultados complementares. Enquanto que Teorema 4 e, posteriormente, Teorema 5 – no caso de  $f^{(n+1)}$  ser contínua em  $I$  – nos garantem a unicidade de  $T_c^n(f(x))$ , num intervalo  $I$  contendo  $c$ , enquanto que o Teorema 7 diz-nos essencialmente que o limite desta série coincide com  $f(x)$ , i.e.

$$f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} T_c^n(f(x)).$$

**Teorema 8 (Série de Taylor vs. Função & Derivadas Limitadas).** *Sejam  $I$  um intervalo,  $c \in I$  e  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  uma função com derivadas finitas de qualquer ordem em  $I$ . Se existir  $M > 0$  tal que*

$$|f^{(n)}(x)| \leq M, \quad \text{para todos os } x \in I, n \in \mathbb{N}_0$$

Então, para todo o  $x \in \mathbb{R}$  tem-se

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(c)}{n!} (x-c)^n$$

**Adenda 14.** A demonstração de que Teorema 8 é um caso particular do Teorema 7 é imediata pelo célebre Teorema do Enquadramento, que deve ter tido oportunidade de estudar em Cálculo I.

**Exemplo 19 (Aplicabilidade do Teorema 7).** Em (Almeida, 2018, Exemplo 1.18) usou-se a condição necessária para a convergência de uma série para mostrar que

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \text{ convergente em } \mathbb{R} \implies \lim_{n \rightarrow \infty} R_0^n(e^x) = e^\theta \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} = 0.$$

Sendo que a implicação recíproca é óbvia, fica então mostrado que  $\lim_{n \rightarrow \infty} T_0^n(e^x)$  (vide Exemplo 14) coincide com a série de Taylor.

**Exemplo 20 (Aplicabilidade do Teorema 8).** Em (Almeida, 2018, Exemplo 1.9 & Exemplo 1.10) foi mostrado que

$$\begin{aligned} T_0^{2n}(\cos(x)) &= \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{(2k)!} x^{2k} \\ T_0^{2n+1}(\sin(x)) &= \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} x^{2k+1}. \end{aligned}$$

Mais adiante, foi mostrado em (Almeida, 2018, Exemplo 1.19 & Exemplo 1.20) que os limites das somas parciais

$$\lim_{n \rightarrow \infty} T_0^{2n}(\cos(x)) \quad \wedge \quad \lim_{n \rightarrow \infty} T_0^{2n+1}(\sin(x))$$

podem ser consideradas como as séries de Taylor das funções cosseno resp. seno, pelo facto de todas as suas derivadas finitas de qualquer ordem em  $\mathbb{R}$  serem limitadas.

**Exemplo 21 (Série de Taylor da Função Logaritmo).** Usando indução em  $k \in \mathbb{N}$ , é possível demonstrar que a função racional  $\frac{1}{x} = x^{-1}$  satisfaz a regra de derivação.

$$(x^{-1})^{(k)} = (-1)^k k! x^{-k-1}.$$

Adicionalmente, da regra de derivação  $(\ln(x))' = \frac{1}{x}$  segue que

$$(\ln(x))^{(n)} = (x^{-1})^{(n-1)} = (-1)^{n-1} (n-1)! x^{-n-2}.$$

Destas últimas fórmulas pode-se concluir que a série de potências do Exemplo 7 é, de facto, a série de Taylor de  $\ln(x)$  em torno de  $c = 1$ .

Esta conclusão pode ser facilmente obtida a partir do do Teorema 8, uma vez que  $|\ln(x)| \leq \ln(2)$  em  $]1, 2]$  e a desigualdade

$$|(\ln(x))^{(n)}| < (n-1)!$$

é satisfeita para todos os  $x \in ]1, 2]$  e  $n \in \mathbb{N}$ .

**Contra-Exemplo 6 (Série de Taylor não converge para a função).** Para a função definida por

$$f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}} & , \text{ se } x \neq 0 \\ 0 & , \text{ se } x = 0 \end{cases}$$

tem-se que, para todo o  $n \in \mathbb{N}$  que

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x)}{x^n} = \lim_{x \rightarrow +\infty} x^n e^{-x^2} = 0 \quad \wedge \quad \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x)}{x^n} = \lim_{x \rightarrow -\infty} x^n e^{-x^2} = 0$$

Logo, pela regra de L'Hôpital (vide **Teorema 6**) segue que  $f^{(n)}(0) = 0$ , para todo o  $n \in \mathbb{N}$ , provando assim que a série de Maclaurin de  $f$  é a função nula (0). No entanto,  $R_0^n(f(x)) = e^{-\frac{1}{x^2}}$  e

$$\lim_{n \rightarrow \infty} R_0^n(f(x)) = e^{-\frac{1}{x^2}} \neq 0.$$

## Séries Geométricas

Os exemplos considerados, ao longo desta secção, envolvem meramente manipulações algébricas, baseados no **Exemplo 1** e na representação de funções racionais, da forma

$$\frac{P(x)}{D(x)} \quad (\text{grau}(P) < \text{grau}(D))$$

como soma de *frações parciais*<sup>4</sup>. O objectivo aqui não passa por visitar esta técnica, mas por aplicá-la sempre que nos seja mais conveniente – é o que se pretende quando tiver a oportunidade de resolver o **Exercício 13** & **Exercício 14**.

Mais adiante, terá a oportunidade de aplicar este tipo de técnica, assim como visitar tudo o que aprendeu até aqui, para resolver o **Exercício 18** & o **Exercício 19**. De salientar que estes dois últimos exercícios deste caderno situa-se na interface entre o cálculo e análise combinatória.

**Exemplo 22 (pp. 674–675 de (Stewart, 2013)).** Na disciplina de Cálculo I, teve seguramente a oportunidade de verificar o seguinte:

i)  $\frac{1}{1+x^2}$  corresponde à derivada da função  $\arctan(x)$ ;

ii)  $\frac{2x}{1+x^2}$  corresponde à derivada de  $\ln(1+x^2)$ .

Com base na fórmula geral da série geométrica, abordada no **Exemplo 1**, pode facilmente verificar que ambas as derivadas podem ser representadas como progressões geométricas de razão  $r = -x^2$ , desde que  $x^2 < 1$  ( $\Leftrightarrow |-x^2| < 1$ ).

Em concreto, assumindo que  $|-x^2| < 1$  obtemos:

i)  $\frac{1}{1+x^2} = \frac{1}{1-(-x)^2} = \sum_{n=0}^{\infty} (-x^2)^n = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^{2n}$   
 [( $a = 1$ ,  $r = -x^2$  e  $p = 0$  em **Exemplo 1**);

ii)  $\frac{2x}{1+x^2} = \frac{2x}{1-(-x)^2} = \sum_{n=0}^{\infty} 2x(-x^2)^n = \sum_{n=0}^{\infty} 2(-1)^n x^{2n+1}$   
 ( $a = 2x$ ,  $r = -x^2$  e  $p = 0$  em **Exemplo 1**).

**Em suma:** Em ambos os casos, o intervalo de convergência corresponde a  $] -1, 1[$ .

<sup>4</sup>Para obter uma solução explícita para este tipo de decomposição deve ter recorrido ao método da variação das constantes

**Mais adiante:** Iremos averiguar, via o *Teorema Fundamental do Cálculo*, em que condições é possível obter o desenvolvimento da série de potências de  $f$  em termos da série de potências da sua derivada,  $f'$ .

**Exemplo 23** (pp. 674–675 de (Stewart , 2013)). Com base na fórmula geral da série geométrica, abordada no **Exemplo 1**, tem-se que a função racional  $\frac{1}{x+2}$  pode ser representada como uma série geométrica de razão  $r = -\frac{x}{2}$ , desde que  $|\frac{-x}{2}| < 1$ .

De facto,

$$\frac{1}{x+2} = \frac{1}{2} \frac{1}{1 + \frac{x}{2}} = \frac{1}{2} \frac{1}{1 - (-\frac{x}{2})} = \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \left(-\frac{x}{2}\right)^n \quad \left( \left|-\frac{x}{2}\right| < 1 \right).$$

Após algumas simplificações, concluímos que:

(a)  $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2^{n+1}} x^n$  corresponde à representação em série de potências de  $\frac{1}{x+2}$ .

(b) Esta série é convergente para valores de  $|x| < 2$  ( $\Leftrightarrow |-\frac{x}{2}| < 1$ ). Ou seja, no intervalo  $] -2, 2[$ .

**Exemplo 24 (Série geométrica vs. método dos coeficientes indeterminados).** Para obtermos o desenvolvimento em série de potências da função racional  $\frac{1}{(1-x)(x+2)}$  em termos das séries geométricas obtidas no **Exemplo 23** e em (Almeida , 2018, Exemplo 1.1), precisamos de aplicar, a priori, o método dos coeficientes indeterminados.

Para tal, comece primeiro por reescrever  $\frac{1}{(1-x)(x+2)}$  na forma

$$\frac{1}{(1-x)(x+2)} = \frac{A}{1-x} + \frac{B}{x+2},$$

onde  $A, B \in \mathbb{R}$  são constantes a determinar.

Ora, como  $x = 1$  e  $x = -2$  são raízes de multiplicidade 1 do polinómio  $(1-x)(x+2)$ , segue que

$$A = \left[ \frac{1}{x+2} \right]_{x=1} = \frac{1}{3} \quad \& \quad B = \left[ \frac{1}{1-x} \right]_{x=-2} = -\frac{1}{3}.$$

Logo,

$$\frac{1}{(1-x)(x+2)} = \frac{\frac{1}{3}}{1-x} - \frac{\frac{1}{3}}{x+2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{3} \left( 1 - \frac{(-1)^n}{2^{n+1}} \right) x^n \quad [\text{após simplificações}].$$

Esta última série converge no intervalo  $] -1, 1[$  – interseção do intervalo de convergência das séries de potências de  $\frac{1}{1-x}$  e de  $\frac{1}{x+2}$ .

**Adenda 15 (Série de Taylor de Funções Racionais).** No caso de  $\frac{P(x)}{D(x)}$  representar função racional, com  $\text{grau}(P) \geq \text{grau}(D)$ , a determinação da série de Taylor inicia-se com a **divisão dos polinómios**  $P(x)$  e  $D(x)$ . Em concreto, se existirem  $Q(x)$  e  $R(x)$  tais que  $\text{grau}(R) < \text{grau}(D)$  e

$$P(x) = Q(x)D(x) + R(x)$$

tem-se que  $\frac{P(x)}{D(x)} = Q(x) + \frac{R(x)}{D(x)}$ .

Desta última igualdade podemos facilmente concluir que a **série de Taylor** corresponde ao limite

$$\lim_{n \rightarrow \infty} T_c^n \left( \frac{P(x)}{D(x)} \right) = Q(x) + \lim_{n \rightarrow \infty} T_c^n \left( \frac{R(x)}{D(x)} \right).$$

**Exemplo 25 (Série Geométrica vs. Divisão de Polinómios).** Da igualdade  $\frac{1-x}{x+2} = -1 + \frac{3}{x+2}$  e do

**Exemplo 23** segue que

$$-1 + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{3(-1)^n}{2^{n+1}} x^n = \frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3(-1)^n}{2^{n+1}} x^n \quad [\text{após simplificações}]^a$$

corresponde à representação da série de potências de  $\frac{1-x}{x+2}$  no intervalo  $] -2, 2[$ .

<sup>a</sup>Para  $n = 0$ , tem-se  $\frac{3(-1)^0}{2^{0+1}} = \frac{3}{2}$ .

**Contra-Exemplo 7 (Muito Cuidado com Generalizações).** É possível de verificar que a série de potências de  $\frac{2}{1-x^2}$  coincide com a série de potências de  $\frac{1}{1-x} + \frac{1}{1+x}$ .

De facto, as igualdades

$$1 + (-1)^n = 0 \quad (n = 2k + 1 - \text{impar}) \quad \text{e} \quad 1 + (-1)^n = 2 \quad (n = 2k - \text{zero ou par})$$

permitem-nos obter, para valores de  $x$  no intervalo  $] -1, 1[$ , a seguinte sequência de igualdades

$$\begin{aligned} \frac{1}{1-x} + \frac{1}{1+x} &= \sum_{n=0}^{\infty} (1 + (-1)^n) x^n \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} 2x^{2k} \quad (n = 2k) \\ &= \frac{2}{1-x^2}. \end{aligned}$$

No entanto, **não é possível encontrar um desenvolvimento em série de potências para  $\frac{1}{(1-x^2)(x+2)}$  em termos das séries de potências de  $\frac{1}{1-x^2}$  e  $\frac{1}{(x+2)}$ , dado não existirem constantes  $A$  e  $B$  tal que a igualdade**

$$\frac{1}{(1-x^2)(2+x)} = \frac{A}{1-x^2} + \frac{B}{x+2}$$

é sempre satisfeita.

A explicação pela qual igualdades como a anterior não se verificarem, em geral, assenta essencialmente no **método dos coeficientes indeterminados**, que teve a oportunidade de aprender em Cálculo I, quando precisou de calcular primitivas, envolvendo funções racionais.

## Exercícios Extra

Os exercícios abaixo deverão ser também ser resolvidos como estudo autônomo (independentemente de serem ou não resolvidos em aula). Caso tenha dúvidas em algum deles, envie-me um e-mail ou compareça numa das OTs.

### Revisões de Séries Numéricas

#### ① APLICAÇÃO DE SÉRIES GEOMÉTRICAS EM ARITMÉTICA DE PONTO FLUTUANTE

Exprima as seguintes dízimas infinitas periódicas como séries geométricas de razão  $r = 10^{-m}$  e represente a sua soma na forma de fração irredutível,  $\frac{p}{q}$  (i.e.  $m.d.c(p, q) = 1$ ).

- (a) 0,99999999...                      (b) 1,67676767...                      (c) 2,33451451...

#### SUGESTÕES:

- (a)  $0, (9) = 0,9 + 0,09 + \dots$   
(b)  $1, (67) = 1 + 0,67 + 0,0067 + \dots$   
(c)  $2,33451451\dots = 2,33 + 0,00(451)$

#### ② CRITÉRIO DE COMPARAÇÃO [POR PASSAGEM AO LIMITE]

Estude a natureza das seguintes séries numéricas de termos positivos.

- (a)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(3n-2)^3}$                       (c)  $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2}{1 + \sqrt[3]{n}}$                       (e)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{7n^3 + n}{n^7 + 11n + 10}$   
(b)  $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{4n-7}$                       (d)  $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{3}{n^2 - \sqrt{n}}$                       (f)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\ln(2n)}$

THEORIA: **Teorema 1** ou o **Teorema 2** | PRAXIS: **Exemplo 2**.

#### ③ SÉRIES HARMÓNICAS VS. CRITÉRIO DE LEIBNIZ

Mostre que para todo o  $\alpha > 1$  a série harmónica alternada  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^\alpha}$  é simplesmente convergente.

THEORIA: **Teorema 3** | PRAXIS: **Exemplo 2** e **Adenda 4**.

#### ④ SÉRIES GEOMÉTRICAS/HARMÓNICAS VS. SÉRIES ALTERNADAS

Comente a veracidade das seguintes afirmações (**V**erdadeiro ou **F**also), justificando convenientemente a sua resposta.

- (a) É possível concluir a convergência da série numérica  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{-n}}{n}$  a partir da convergência da série harmónica  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha}$ , para valores de  $\alpha > 1$ .  
(b) As séries numéricas  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{-n}}{n}$  e  $\sum_{n=1}^{\infty} ne^{-n}$  têm a mesma natureza.  
(c) É possível concluir a convergência de  $\sum_{n=1}^{\infty} ne^{-n}$  a partir da convergência de  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{-n}}{n}$ .

- (d) A série numérica  $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n n e^{-n}$  converge absolutamente.
- (e) A série numérica  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n e^{-n}}{n}$  converge simplesmente.
- (f) É possível concluir a convergência da série numérica  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n e^{-n}}{n}$  a partir da convergência da série numérica  $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n e^{-n}$ .

THEORIA: **Definição 1** & **Teorema 2** | PRAXIS: **Exemplo 3** & **Adenda 3**.

**5** CRITÉRIO DA RAZÃO OU CRITÉRIO DA RAÍZ

Estude a natureza das seguintes séries numéricas usando o critério da razão ou o critério da raiz.

- (a)  $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-3)^n n!}{n^n}$                       (b)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{5^n \sqrt{n}}$                       (c)  $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(\ln(n))^n}{n}$

**Séries de Potências**

**6** COMPLEMENTAR AO EXERCÍCIO **2** & EXERCÍCIO **5**

Determine o raio de convergência e o domínio de convergência das seguintes séries de potências.

- (a)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n x^n}{(3n-2)^3}$                       (d)  $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{3(4x-1)^n}{n^2 - \sqrt{n}}$                       (g)  $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n!}{n^n} (3x)^{2n+1}$
- (b)  $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(x+1)^n}{4n-7}$                       (e)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{7n^3 + n}{n^7 + 11n + 10} (3-x)^n$                       (h)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2x-1)^{2n}}{5^n \sqrt{n}}$
- (c)  $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2(x-5)^n}{1 + \sqrt[3]{n}}$                       (f)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2x+3)^n}{\ln(2n)}$                       (i)  $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(\ln(n))^n}{n} (4x-7)^{3n-2}$

**7** COMPLEMENTAR AO EXEMPLO 6 & EXEMPLO 7

Comente a veracidade das seguintes afirmações (**V**erdadeiro ou **F**also), justificando convenientemente a sua resposta.

- (a)  $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n (x-1)^n$  é uma série de termos positivos, para valores de  $1 < x < 2$ .
- (b)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} (x-1)^n$  é uma série de termos negativos, para valores de  $0 < x < 1$ .
- (c)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} (x-1)^n < \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n (x-1)^n$ , para valores de  $0 < x < 1$ .
- (d)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^n} (x-1)^n < \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} (x-1)^n$ , para valores de  $1 < x < 2$ .

## Fórmula de Taylor

### 8) POLINÓMIO DE TAYLOR DE POLINÓMIOS MÓNICOS

Mostre as seguintes igualdades, envolvendo a fórmula combinatória  $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$  e o polinómio de Taylor de ordem  $n$  da função  $x^n$  em torno do ponto  $c$ ,  $T_c^n(x^n)$ .

(a)  $\frac{d^k}{dx^k}(x^n) = k! \binom{n}{k} x^{n-k}$ , para todo o  $k \leq n$ .

(b)  $T_c^n(x^n) = x^n$ .

**SUGESTÕES:**

(a) Observe que  $\frac{n!}{(n-k)!} = n(n-1)\dots(n-(k-1))$ .

(b) Use a definição de  $T_c^n$  e o binómio de Newton.

### 9) POLINÓMIO DE TAYLOR E RESTO DE LAGRANGE<sup>5</sup>

Sejam  $T_1^n\left(\frac{1}{x}\right)$  e  $T_1^n(\ln(x))$  os polinómios de Taylor de ordem  $n$  das funções  $\frac{1}{x}$  e  $\ln(x)$ , em torno do ponto  $c = 1$ .

(a) Verifique a igualdade  $\int_1^x T_1^n\left(\frac{1}{t}\right) dt = T_1^n(\ln(x))$ .

(b) Determine a ordem mínima ( $n$ ) do polinómio de Taylor  $T_1^n(\ln(x))$  que nos permite aproximar  $\ln(2)$ , no intervalo  $[1.9, 2.1]$ , com erro inferior  $0.5 \times 10^{-6}$ , i.e.

$$|R_1^n(f(x))| < 0.5 \times 10^{-6}.$$

THEORIA: **Corolário 1** | PRAXIS: **Exemplo 13 & Exemplo 21**.

### 10) FÓRMULA DE TAYLOR VS. REGRA DE L'HÔPITAL

Na resolução das próximas alíneas, considere as seguintes fórmulas:

$$\sinh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}, \quad \cosh(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}, \quad 2 \sin^2(\theta) = 1 - \cos(2\theta).$$

(a) Calcule os seguintes polinómios de Taylor:

i)  $T_{-1}^2(\ln(x^2 + \sqrt{x^4 - 1}))$       ii)  $T_0^3(\sinh(x) - x)$       iii)  $T_1^4(\sin^2(\pi x))$

(b) Use os polinómios de Taylor, obtidos anteriormente, para calcular o valor exato dos seguintes limites:

i)  $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{\ln(x^2 + \sqrt{x^4 - 1})}{x^2 + 2x}$       ii)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sinh(x) - x}{x^3}$       iii)  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 + 4x - 5}{\sin^2(\pi x)}$

### 11) EXISTÊNCIA DE SÉRIE DE TAYLOR

Seja  $f$  a função real de variável real, definida por  $f(x) = \ln(1+x)$ .

(a) Mostre que  $f(x)$  coincide com sua série de Maclaurin,  $\lim_{n \rightarrow \infty} T_0^n f(x)$ , no intervalo  $] -1, 1[$ .

(b) Diga, justificando, se para valores de  $c > 1$  a função  $f$  também coincide com a sua série de Taylor,  $\lim_{n \rightarrow \infty} T_c^n f(x)$ , no intervalo  $[1, +\infty[$ .

**SUGESTÃO:** Refaça os cálculos do **Exemplo 21** para cada um dos casos.

<sup>5</sup>Este exercício é complementar ao **Exercício 7**, da **Folha Prática 1**.

## Séries Geométricas

### 12 APLICAÇÃO DO EXEMPLO 1

Determine para que valores de  $s \in \mathbb{R}$  as séries geométricas abaixo são convergentes e, em caso afirmativo, determine o valor da sua soma.

$$(a) \sum_{n=0}^{\infty} (\cos(\pi s))^n$$

$$(b) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3} \left(\frac{3}{4}\right)^n e^{sn}$$

$$(c) \sum_{n=2}^{\infty} \frac{6^n}{7^{n+1}} s^{n-2}$$

SUGESTÃO:

(c) É conveniente realizar a mudança de variável  $n = k + 2$  ( $k \geq 0$ ) no somatório.

### 13 COMPLEMENTAR AO EXEMPLO 22, EXEMPLO 23 & EXEMPLO 24

Determine o desenvolvimento em série geométrica para cada uma das seguintes funções racionais, indicando o maior intervalo para o qual o desenvolvimento é válido.

$$(a) \frac{x}{3x - 4}$$

$$(b) \frac{x + 1}{x^2 - 4x + 3}$$

$$(c) \frac{5}{(1 + x^2)(x + 2)}$$

SUGESTÕES:

(a) Comece por obter o desenvolvimento em série geométrica de  $\frac{1}{3x - 4}$  ( $= \frac{a}{1 - r}$ ;  $a, r = ?$ ), colocando 4 em evidência no denominador

(b) Comece por reescrever a fração racional na forma  $\frac{A_1}{x - r_1} + \frac{A_2}{x - r_2}$ , onde  $r_1$  e  $r_2$  são as raízes de  $x^2 - 4x + 3$ .

(c) Terá de considerar a igualdade  $\frac{5}{(1 + x^2)(x + 2)} = \frac{Ax + B}{1 + x^2} + \frac{C}{x + 2}$  -  $A, B, C$  constantes a determinar - uma vez que  $1 + x^2$  não tem raízes reais.

### 14 ANÁLOGO AO EXERCÍCIO 11 DA FOLHA PRÁTICA 1

Desenvolva a função racional  $\frac{x - 1}{x + 1}$  em série de potências de  $x + 5$ , indicando o maior intervalo para o qual o desenvolvimento em série é válido.

SUGESTÕES:

i) Comece por dividir os polinômios  $x - 1$  e  $x + 1$  para reescrever  $\frac{x - 1}{x + 1}$  como uma soma.

ii) Use a igualdade  $\frac{1}{x + 1} = \frac{1}{(x + 5) - 4}$ .

## Desafios

### 15 PROPRIEDADES DAS SÉRIES DE POTÊNCIAS

Seja  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$  uma sucessão de termos não nulos, e  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$  é uma série de potências convergente no intervalo  $] - R, R[$ . Determine o domínio e o raio de convergência das seguintes séries de potências.

$$(a) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{a_n}$$

$$(b) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{Rn + 1} (x - R)^n$$

$$(c) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{Rn + 1} (x + R)^{2n}$$

**16** POLINÓMIO DE MACLAURIN VS. FÓRMULA BINOMIAL

Seja  $T_0^n(e^x \sin(x))$  o polinómio de Maclaurin de ordem  $n$  de  $e^x \sin(x)$  e  $R_0^n(e^x \sin(x))$  o respetivo erro de aproximação.

- (a) Mostre a seguinte desigualdade, envolvendo o erro de aproximação do polinómio de Maclaurin de ordem  $n$  de  $e^x \sin(x)$ ,  $R_0^n(e^x \sin(x))$ , no intervalo  $[-1, 0]$ :

$$|R_0^n(e^x \sin(x))| \leq \frac{2^{n+1}}{(n+1)!}, \text{ para todo } x \in [-1, 0].$$

- (b) Diga, justificando, qual a ordem mínima do polinómio de Maclaurin de  $e^x \sin(x)$  ( $n$ ) a partir da qual se verificam as seguintes desigualdades em  $[-1, 0]$ :

i)  $|R_0^n(e^x \sin(x))| < 1$       ii)  $|R_0^n(e^x \sin(x))| < \left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}$       iii)  $|R_0^n(e^x \sin(x))| < \left(\frac{2}{5}\right)^{n+1}$

**SUGESTÃO:**

- (a) Aplique diretamente a identidade binomial  $2^{n+1} = \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k}$  e a regra de derivação generalizada

$$(fg)^{(n+1)}(x) = \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} f^{(k)}(x)g^{(n+1-k)}(x).$$

- (b) Vide link <https://www.geogebra.org/m/zfdmreqg>.

**17** EXERCÍCIO COMPUTACIONAL ENVOLVENDO POLINÓMIOS DE TAYLOR

Seja  $f$  a função real de variável real, definida por  $f(x) = \int_0^x e^{-\frac{t^2}{2}} dt$ .

- (a) Com recurso ao GeoGebra, represente o gráficos da função<sup>6</sup>  $f$  e dos polinómio de Maclaurin  $T_0^n(f(x))$ , onde  $n$  deverá ser definido como um *parâmetro inteiro*.

- (b) Verifique que a aproximação do integral definido  $\int_{-4}^4 e^{-\frac{t^2}{2}} dt$ , obtida com recurso ao polinómio de Maclaurin, nos dá uma aproximação do número transcendente  $\sqrt{2\pi}$ . E determine numericamente qual o menor grau para o qual se tem

$$\left| \int_{-4}^4 e^{-\frac{t^2}{2}} dt - \sqrt{2\pi} \right| < 0.5 \times 10^{-8}.$$

**SUGESTÕES:**

- (a) Vide exemplo criado em <https://www.geogebra.org/classic/tcnpz8fh>.

- (b) Comece por demonstrar a igualdade<sup>7</sup>  $\int_{-a}^a e^{-\frac{t^2}{2}} dt = 2f(a)$ .

**18** NÚMEROS DE FIBONACCI VS. SÉRIES GEOMÉTRICAS<sup>8</sup>

Seja  $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} F_n x^n$  uma série de potências absolutamente convergente em  $] -R, R[$  ( $R$ -raio de convergência a determinar), definida em termos da sucessão de números Fibonacci  $(F_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ :

$$F_n = \begin{cases} n & , n = 0, 1 \\ F_{k+1} + F_k & , n = k + 2 \quad (k \geq 0). \end{cases}$$

<sup>6</sup>Para representar o gráfico de  $f$  no GeoGebra, use o comando `Integral(<Função>)`.

<sup>7</sup>Resulta do facto da função integranda,  $f'(x) = e^{-\frac{x^2}{2}}$ , ser uma função par.

<sup>8</sup>Exercício formulado a partir de (Knuth, 1997, 1.2.8. Fibonacci Numbers).

- (a) Use a definição de  $(F_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$  (fórmula recursiva dada acima) para mostrar que  $f(x) = \frac{x}{1-x-x^2}$ .
- (b) Mostre, por indução em  $n \in \mathbb{N}_0$ , que  $F_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \left( \frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^n - \frac{1}{\sqrt{5}} \left( \frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^n$ .
- (c) Use o desenvolvimento em série de potências de  $\frac{x}{1-x-x^2}$  para:
- Confirmar a fórmula geral de  $(F_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$  obtida no item anterior.
  - Verificar que  $R = \frac{1}{\phi}$  é o raio de convergência da série, onde  $\phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$  corresponde ao número de ouro abordado no **Exemplo 17**.
- (d) Estude a natureza das seguintes séries numéricas. Em caso de convergência, calcule sua soma.
- $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n 5^{\frac{n}{2}} F_n}{2^n}$
  - $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n F_n}{2^n}$
  - $\sum_{n=0}^{\infty} 5^{-\frac{n}{2}} F_n$

### SUGESTÕES:

- (a) Comece por reescrever  $f(x)$  como  $f(x) = F_0 + F_1 x + g(x)$  ( $F_0, F_1 = ?$ ), onde  $g(x) = \sum_{k=0}^{\infty} F_{k+2} x^{k+2}$ . De seguida, mostre que  $g(x) = x^2 f(x) + x f(x)$ . Para terminar, resolva a equação resultante em ordem a  $y = f(x)$  (solução pretendida).
- (b) Primeiro, terá de mostrar que a fórmula geral é verdadeira para  $n = 0$  e  $n = 1$  (caso base). Para demonstrar o passo indutivo, i.e.

$$F_{k+2} = \frac{1}{\sqrt{5}} \left( \frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^{k+2} - \frac{1}{\sqrt{5}} \left( \frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^{k+2} \quad (n = k + 2)$$

terá de assumir que a fórmula dada é verdadeira para  $n = k$  e  $n = k + 1$ .

- (c) Análogo ao raciocínio a adotar na resolução no item (b) do **Exercício 13**. Para simplificar a sua resolução:
- Expresse as raízes de  $1 - x - x^2$  em termos das constantes  $\phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$  e  $\psi = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$ .
  - Como a série de potências obtida pode ser expressa como a soma de duas séries geométricas, de raios  $r_1$  e  $r_2$  respetivamente, então  $R = \min\{r_1, r_2\}$  vai ser o raio de convergência pretendido.

## 19 IMPLEMENTAÇÃO COMPUTACIONAL DE NÚMEROS DE FIBONACCI

Escreva um programa de computador, num software à sua escolha, que execute as seguintes operações:

- Gere os primeiros  $n + 1$  termos da sucessão de Fibonacci  $(F_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$  (cf. (Knuth, 1997, p. 79)):
 
$$0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, 233, 377, 610, 987, 1597, 2584, 4181, 6765, \dots$$
- Determine, em cada iteração, as aproximações sucessivas para o raio de convergência da série de potências estudada no **Exercício 18**.
- Adote  $\left| \left( \frac{F_n}{F_{n+1}} + \frac{1}{2} \right)^2 - \frac{5}{4} \right| < 0,25 \times 10^{-2p}$  como *critério de paragem*<sup>9</sup>.
- Devolva o valor exato do somatório  $\sum_{k=0}^n F_k$  (somando apenas dois números de Fibonacci)<sup>10</sup>.

<sup>9</sup>Este critério de paragem permite-nos assegurar uma aproximação de  $\frac{1}{\phi} = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$  por  $\frac{F_n}{F_{n+1}}$  com um erro de arredondamento inferior a  $0,5 \times 10^{-p}$ .

<sup>10</sup>Vide (Knuth, 1997, p. 85, Exercício 20) e a sua solução em (Knuth, 1997, p.494).

# Bibliografia

**Almeida (2018)** A. Almeida, *Cálculo II – Texto de apoio* (versão fev. 2018)

Disponível na plataforma Moodle da UA.

**Apostol (1983)** T. M. Apostol, *Cálculo: Volume 1*, Editora Reverté, Rio de Janeiro, 1983.

**Brás (2020)** I. Brás, *Séries de Potências e Fórmula de Taylor* (versão 4/2/2020)<sup>11</sup>

Disponível na plataforma Moodle da UA.

**Knuth (1997)** D. E. Knuth. *The art of computer programming, vol 1: Fundamental Algorithms*, 3rd edition, Reading, MA: Addison-Wesley, 1997.

**Formato Digital:** disponível a partir [desta hiperligação](#) [só clicar no texto a azul]

**Stewart (2013)** J. Stewart, *Cálculo: Volume 2*, Tradução da 7<sup>a</sup> edição norte-americana, São Paulo, Cengage Learning, 2013

**Formato Digital:** disponível a partir [desta hiperligação](#) [só clicar no texto a azul]

---

<sup>11</sup>Aparece no Moodle com o título *Slides para o Capítulo 1*.