Espaço vetorial e subespaço

1. Considere o conjunto $\mathcal{V} = \mathbb{R}^2$ munido das operações $\oplus$ e $\odot$ assim definidas:

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \oplus \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 + y_1 - 1 \\ x_2 + y_2 + 1 \end{bmatrix} \qquad \text{e} \qquad \alpha \odot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha x_1 - \alpha + 1 \\ \alpha x_2 + \alpha - 1 \end{bmatrix}, \ \alpha \in \mathbb{R}.$$

   (a) Mostre que $\mathcal{V}$ é um espaço vetorial e calcule o elemento neutro $0_{\mathcal{V}}$ e o simétrico de $X \in \mathcal{V}$.

   (b) Verifique se o conjunto $\mathcal{S} = \left\{ \begin{bmatrix} 1-2t \\ t-1 \end{bmatrix} : t \in \mathbb{R} \right\}$ é subespaço de $\mathcal{V}$.

2. Averigue se os seguintes conjuntos são subespaços dos espaços vetoriais indicados.

   (a) No espaço vetorial $\mathbb{R}^2$, o conjunto dos vetores (x, y) tais que: i. $x + y = 0$; ii. $(x, y) \neq (1, 1)$.

   (b) No espaço vetorial $\mathbb{R}^3$, o conjunto dos vetores (x, y, z) tais que $x^2 + y^2 + z^2 = 1$.

   (c) No espaço vetorial $\mathcal{P}_2$ dos polinómios em x de grau não superior a 2, o conjunto dos polinómios $ax^2 + bx + c$ com: i. $c = 0$; ii. $b = 1$; iii. $bc = 0$.

   (d) No espaço vetorial $\mathbb{R}^{n\times n}$ das matrizes quadradas de ordem n, o conjunto das matrizes

   i. simétricas; ii. triangulares; iii. invertíveis;
   iv. X tais que $AX = O$; v. X tais que $AX = I_n$, sendo $\det A \neq 0$

   (e) No espaço vetorial $\mathbb{R}^n$, o conjunto dos vetores que são ortogonais a um dado vetor $X \in \mathbb{R}^n$.

   (f) No espaço vetorial $\mathcal{F}(\mathbb{R})$ das funções reais de variável real, o conjunto das funções f tais que $f(0) = 0$.

3. Sejam $\mathcal{V}$ um espaço vetorial e $X_1, X_2, X_3 \in \mathcal{V}$. Mostre que o conjunto

$$\mathcal{S} = \langle X_1, X_2, X_3 \rangle = \{a_1X_1 + a_2X_2 + a_3X_3 : \ a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{R}\}$$

   é um subespaço de $\mathcal{V}$ ($\mathcal{S}$ é o subespaço de $\mathcal{V}$ gerado por X_1, X_2, X_3).

4. Mostre que se E é subespaço de $\mathbb{R}^{n\times n}$ e $P \in \mathbb{R}^{n\times n}$ é invertível, então $F = \{P^{-1}AP : \ A \in E\}$ é também subespaço de $\mathbb{R}^{n\times n}$.

Combinação linear, subespaço gerado e independência linear

5. Escreva, sempre que possível,

   (a) o vetor $(2, -3, -4, 3)$ como combinação linear dos vetores $(1, 2, 1, 0)$ e $(4, 1, -2, 3)$;

   (b) o vetor $(1, 1, 0)$ como combinação linear dos vetores $(2, 1, -2)$, $(1, 0, 0)$ e $(1, 1, 1)$;

   (c) o polinómio $-t^2 + t + 4$ como combinação linear dos polinómios $t^2 + 2t + 1$, $t^2 + 3$ e $t - 1$;

   (d) a matriz $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$ como combinação linear das matrizes $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$ e $\begin{bmatrix} 2 & 2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$.

6. Determine o subespaço gerado pelos conjuntos indicados.

   (a) $\{(0, 1), (2, 1), (2, 2)\}$ em $\mathbb{R}^2$; (b) $\{(0, 1), (0, 2)\}$ em $\mathbb{R}^2$;
   (c) $\{(1, 1, 1), (1, 0, 0), (2, 2, 2)\}$ em $\mathbb{R}^3$; (d) $\{t^2 + 1, t^2 + t, t + 1\}$ em $\mathcal{P}_2$.

7. Determine um conjunto gerador do espaço nulo da matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$.

8. Considere o espaço vetorial $\mathbb{R}^2$ e u um vetor não nulo de $\mathbb{R}^2$.
   (a) Verifique que $\langle u \rangle$ é a reta que passa pela origem e tem a direcção de u.
   (b) Represente geometricamente $\langle (1,-1) \rangle$.

9. Considere o espaço vetorial $\mathbb{R}^3$ e os vetores u_1 e u_2 de $\mathbb{R}^3$ linearmente independentes.
   (a) Mostre que o subespaço gerado por u_1 é a reta que passa pela origem e tem a direção de u_1.
   (b) Mostre que o subespaço gerado pelos vetores u_1 e u_2 é o plano que passa pela origem e que contém os vetores u_1 e u_2.
   (c) Descreva geometricamente os seguintes subespaços
   i. $\langle (1,-1,2) \rangle$; ii. $\langle (1,0,1),(0,0,1) \rangle$; iii. $\langle (1,-1,1),(-2,2,-2) \rangle$.

10. Averigue quais dos seguintes conjuntos de vetores são linearmente independentes.

    (a) $\{(1,1,0),(0,2,3),(1,2,3),(1,-1,1)\}$;
    (b) $\{(1,2,3),(1,1,1),(1,0,1)\}$;
    (c) $\{(1,1,1,1),(1,-1,2,3),(1,3,0,-1)\}$;
    (d) $\{2t^2+1, t-2, t+3\}$.

11. Seja $\{X_1,\ldots,X_n\}$ um conjunto de vetores de $\mathbb{R}^n$ linearmente independente. Mostre que, se A é uma matriz quadrada de ordem n invertível, então $\{AX_1,\ldots,AX_n\}$ é linearmente independente.

12. Seja $A \in \mathbb{R}^{2\times 2}$. Mostre que as linhas de A são linearmente independentes se e só se as suas colunas o são.

Bases e dimensão

13. Dos seguintes conjuntos de vetores indique os que são bases dos espaços vetoriais indicados:

    (a) $\{(1,2),(2,4)\}$ em $\mathbb{R}^2$;
    (b) $\left\{ \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \right\}$ em $\mathbb{R}^{2\times 2}$;
    (c) $\{(1,0,1),(1,1,0),(0,1,1)\}$ em $\mathbb{R}^3$;
    (d) $\{t^2-2t+1, t^2+t+1, t^2+1\}$ em $\mathcal{P}_2$.

14. Determine uma base e a dimensão do subespaço gerado pelos vetores:

    (a) $(1,3,0),(-1,1,0)$ em $\mathbb{R}^3$;
    (b) $(1,-1,1),(0,2,1),(1,1,2)$ em $\mathbb{R}^3$;
    (c) t^2+1, t^2-t+1 em $\mathcal{P}_2$.

15. Determine todos os valores de a para os quais $\{(a^2,0,1),(0,a,2),(1,0,1)\}$ é uma base de $\mathbb{R}^3$.

16. Determine uma base de $\mathbb{R}^4$ que contenha os vetores $(1,0,1,0)$ e $(0,1,-1,0)$.

17. Seja $S = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x - y + 3z = 0\}$.
    (a) Verifique que S é um subespaço vetorial de $\mathbb{R}^3$.
    (b) Determine um conjunto gerador de S e verifique se ele é linearmente independente.
    (c) Indique, justificando, a dimensão de S.

18. Mostre que, se $\{X_1,X_2,\ldots,X_n\}$ for uma base de um espaço vetoriais real $\mathcal{V}$, então
    (a) $\{cX_1, X_2\ldots,X_n\}$ com $c \neq 0$ é também uma base de $\mathcal{V}$;
    (b) $\{X_1+X_2+\cdots+X_n, X_2+\cdots+X_n,\ldots,X_n\}$ é ainda uma base de $\mathcal{V}$.

Espaço das linhas e espaço das colunas, espaço nulo e nulidade

19. Considere a matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$.
    (a) Determine uma base do espaço nulo de A e indique, justificando, a nulidade de A.
    (b) Determine o subespaço $\mathcal{S} = \{AX : X \in \mathbb{R}^4\}$.
    (c) Mostre que $\{(1,-1,-1),(4,-3,-2)\}$ é uma base de $\mathcal{S}$.

20. Seja $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$. Mostre que
    (a) se $m > n$, então as linhas de A são linearmente dependentes;
    (b) se $m < n$, então as colunas de A são linearmente dependentes.

21. Para cada uma das matrizes $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ a seguir:

    (a) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \\ -3 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$ (b) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 3 & 4 & -1 & -2 \end{bmatrix}$ (c) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ (d) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 \\ -1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$

    i. determine uma base para o espaço nulo $\mathcal{N}(A)$ de A;
    ii. determine bases para o espaço das linhas $\mathcal{L}(A)$ e o espaço das colunas $\mathcal{C}(A)$ de A;
    iii. calcule a caraterística e a nulidade, e verifique que $\operatorname{car}(A) + \operatorname{nul}(A) = n$;
    iv. diga, usando a informação dada pela caraterística, se as linhas de A são linearmente independentes.

22. Sejam $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ e $B \in \mathbb{R}^{n\times p}$. Mostre que o espaço das colunas de AB está contido no espaço das colunas de A.

Coordenadas e mudança de bases

23. Considere as bases $\mathcal{B}_1 = \big((1,2,1),(0,2,0),(0,0,-1)\big)$ e $\mathcal{B}_2 = \big((1,0,-1),(1,1,1),(2,3,-1)\big)$ de $\mathbb{R}^3$.
    (a) Calcule $[X]_{\mathcal{B}_1}$ e $[X]_{\mathcal{B}_2}$ para i. $X = (2,3,5)$, ii. $X = (-1,2,0)$ e iii. $X = (1,1,1)$.
    (b) Determine a matriz M de mudança da base $\mathcal{B}_1$ para a base $\mathcal{B}_2$. Confirme os resultados obtidos em (a) usando M.

24. Sejam $\mathcal{S} = \big((1,2),(0,1)\big)$ e $\mathcal{T} = \big((1,1),(2,3)\big)$ duas bases de $\mathbb{R}^2$ e o vetor $X = (1,5)$. Determine
    (a) as coordenadas de X na base $\mathcal{S}$ e as coordenadas de X na base $\mathcal{T}$;
    (b) o vetor Z tal que $[Z]_{\mathcal{T}} = (1,-3)$;
    (c) a matriz M de mudança da base $\mathcal{T}$ para a base $\mathcal{S}$;
    (d) as coordenadas de X na base $\mathcal{S}$ usando M;
    (e) a matriz N de mudança da base $\mathcal{S}$ para a base $\mathcal{T}$;
    (f) as coordenadas de X na base $\mathcal{T}$ usando N.

25. Sejam $\mathcal{S} = (X_1, X_2, X_3)$ e $\mathcal{T} = (Y_1, Y_2, Y_3)$ bases de $\mathbb{R}^3$ com $X_1 = (-1,1,0)$, $X_2 = (1,0,1)$ e $X_3 = (0,0,1)$. Determine $\mathcal{T}$, sabendo que a matriz de mudança da base $\mathcal{T}$ para a base $\mathcal{S}$ é

$$M = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Bases ortonormadas e projeções ortogonais

26. Verifique se os conjuntos de vetores seguintes são ortogonais:

    (a) $\{(1,2,1),(0,-1,2),(0,2,1)\}$; (b) $\{(1,2,-1,1),(0,-1,-2,0),(1,0,0,-1)\}$.

27. Indique para que valores de a e b o conjunto $\left\{(\frac{\sqrt{2}}{2},0,\frac{\sqrt{2}}{2}),(a,\frac{\sqrt{2}}{2},-b)\right\}$ é ortonormado.

28. Sejam $X_1=(\frac{4}{5},0,\frac{3}{5})$, $X_2=(0,1,0)$ e $X_3=(-\frac{3}{5},0,\frac{4}{5})$ vetores de $\mathbb{R}^3$.
    (a) Verifique que $\mathcal{B}=(X_1,X_2,X_3)$ é uma base ortonormada de $\mathbb{R}^3$.
    (b) Calcule o vetor $[X]_{\mathcal{B}}$ para $X=(1,1,1)$, usando o facto de $\mathcal{B}$ ser uma base ortonormada.
    (c) Calcule a matriz M de mudança da base $\tilde{\mathcal{B}}=\big((0,0,1),(0,1,1),(1,1,1)\big)$ para a base $\mathcal{B}$.
    (d) Calcule $[Y]_{\mathcal{B}}$, sabendo que $[Y]_{\tilde{\mathcal{B}}}=(1,2,3)$.

29. Sejam $X,Y_1,\ldots,Y_n$ vetores em $\mathbb{R}^n$. Mostre que se X é ortogonal a $Y_1,\ldots,Y_n$, então X é também ortogonal a qualquer vetor do subespaço gerado por $Y_1,\ldots,Y_n$.

30. Considere o plano $\mathcal{P}$ de $\mathbb{R}^3$ gerado pelos vetores $X_1=(1,1,0)$ e $X_2=(0,0,1)$.
    (a) Determine uma base ortonormada de $\mathcal{P}$.
    (b) Determine a projeção ortogonal do vetor $X=(2,-2,1)$ sobre o plano $\mathcal{P}$.
    (c) Determine a distância do ponto $(2,1,1)$ ao plano $\mathcal{P}$, usando a alínea (a).

31. Calcule as projeções ortogonais de $X=(4,0,-9)$ e $Y=(2,7,-1)$ sobre o subespaço $\mathcal{W}$ de $\mathbb{R}^3$ gerado pelos vetores $(0,1,0)$ e $(\frac{1}{2},0,\frac{\sqrt{3}}{2})$.

32. Diga se as seguintes afirmações são verdadeiras ou falsas, justificando convenientemente.
    (a) Todos os vetores da forma $(a,0,-a)$ com $a\in\mathbb{R}$ formam um subespaço de $\mathbb{R}^3$.
    (b) Todo o conjunto de vetores de $\mathbb{R}^3$ com dois vetores é linearmente independente.
    (c) O espaço das soluções do sistema homogéneo $AX=0$ é gerado pelas colunas de A.
    (d) Se as colunas de uma matriz $n\times n$ formarem uma base de $\mathbb{R}^n$, então o mesmo acontece com as linhas.
    (e) Se A é uma matriz 8×8 tal que o sistema homogéneo $AX=0$ só tem a solução trivial, então $\mathrm{car}(A)<8$.
    (f) Todo o conjunto de 5 vetores em $\mathbb{R}^5$ é uma base em $\mathbb{R}^5$.
    (g) Todo o conjunto ortonormado de 5 vetores em $\mathbb{R}^5$ é uma base em $\mathbb{R}^5$.
    (h) Todo o conjunto de vetores de $\mathbb{R}^3$ linearmente independente contém 3 vetores.
    (i) Se A é uma matriz simétrica $n\times n$, então $\mathrm{car}(A)=n$.
    (j) Todo o conjunto de vetores que geram $\mathbb{R}^3$ contém pelo menos 3 vetores.

1. (a) $0_{\mathcal{V}} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$ e $\ominus \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 - x_1 \\ -2 - x_2 \end{bmatrix}$. (b) Sim.

2. (a) i. Sim; ii. não. (b) Não. (c) i. Sim; ii. não; iii. não. (d) i. Sim; ii. não; iii. não; iv. sim; v. não. (e) Sim. (f) Sim.

5. (a) $(2,-3,-4,3) = -2(1,2,1,0) + (4,1,-2,3)$; (b) $(1,1,0) = \frac{1}{3}(2,1,-2) - \frac{1}{3}(1,0,0) + \frac{2}{3}(1,1,1)$; (c) e (d) não é possível.

6. (a) $\mathbb{R}^2$; (b) $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x = 0\}$; (c) $\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : y = z\}$; (d) $\mathcal{P}_2$.

7. $\{(-1,-1,1,0),(0,-1,0,1)\}$.

10. (a) Não; (b) sim; (c) não; (d) sim.

13. (a) Não; (b) sim; (c) sim; (d) Não.

14. (a) $\{(1,0,0),(0,1,0)\}$, dimensão 2; (b) $\{(1,-1,1),(0,2,1)\}$, dimensão 2; (c) $\{t^2+1, t\}$, dimensão 2.
Nota: Em (a) e (c), o conjunto dado também constitui uma base.

15. $a \in \mathbb{R} \setminus \{-1,0,1\}$.

16. $\{(1,0,1,0),(0,1,-1,0),(0,0,1,0),(0,0,0,1)\}$.

17. (b) $\{(1,1,0),(0,3,1)\}$ que é l.i.; (c) 2.

19. (a) $\{(-1,1,0,0),(-2,0,1,1)\}$ e $\operatorname{nul} A = 2$. (b) $\{(a,b,c) \in \mathbb{R}^3 : c = a + 2b\}$.

21. (a) i. $\varnothing$; ii. $\mathcal{B}_{\mathcal{L}(A)} = \{(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)\}$ e $\mathcal{B}_{\mathcal{C}(A)} = \{(1,2,-3,1),(0,1,2,2),(0,0,1,\frac{2}{3})\}$; iii. $\operatorname{car} A = 3$, $\operatorname{nul} A = 0$; iv. não.
    (b) i. $\{(-8,7,4,0),(-4,5,0,4)\}$; ii. $\mathcal{B}_{\mathcal{L}(A)} = \{(1,0,2,1),(0,1,-\frac{7}{4},-\frac{5}{4})\}$ e $\mathcal{B}_{\mathcal{C}(A)} = \{(1,0),(0,1)\}$; iii. $\operatorname{car} A = 2$, $\operatorname{nul} A = 2$; iv. sim.
    (c) i. $\{(5,-2,-9,13,0),(-6,-8,3,0,13)\}$; ii. $\mathcal{B}_{\mathcal{L}(A)} = \{(1,2,3,2,1),(0,1,\frac{9}{5},\frac{7}{5},\frac{1}{5}),(0,0,1,\frac{9}{13},-\frac{3}{13})\}$ ou $\mathcal{B}_{\mathcal{L}(A)} = \{(1,0,0,-\frac{5}{13},\frac{6}{13}),(0,1,0,\frac{2}{13},\frac{8}{13}),(0,0,1,\frac{9}{13},-\frac{3}{13})\}$ e $\mathcal{B}_{\mathcal{C}(A)} = \{(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)\}$; iii. $\operatorname{car} A = 3$, $\operatorname{nul} A = 2$; iv. sim.
    (d) i. $\varnothing$; ii. $\mathcal{B}_{\mathcal{L}(A)} = \mathcal{B}_{\mathcal{C}(A)} = \{(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)\}$; iii. $\operatorname{car} A = 3$, $\operatorname{nul} A = 0$; iv. sim.

    Nota: Em (a), as colunas da matriz dada também constituem uma base de $\mathcal{C}(A)$.
    Em (b) e (c), as linhas da matriz dada também constituem uma base de $\mathcal{L}(A)$.
    Em (d), as linhas/colunas da matriz dada também constituem bases de $\mathcal{L}(A)/\mathcal{C}(A)$.

23. (a) i. $[(2,3,5)]_{\mathcal{B}_1} = (2,-\frac{1}{2},-3)$ e $[(2,3,5)]_{\mathcal{B}_2} = (-\frac{6}{5},\frac{18}{5},-\frac{1}{5})$; ii. $[(-1,2,0)]_{\mathcal{B}_1} = (-1,2,-1)$ e $[(-1,2,0)]_{\mathcal{B}_2} = (-2,-1,1)$; iii. $[(1,1,1)]_{\mathcal{B}_1} = (1,-\frac{1}{2},0)$ e $[(1,1,1))]_{\mathcal{B}_2} = (0,1,0)$. (b) $M = \frac{1}{5}\begin{bmatrix} -3 & -6 & 1 \\ 4 & -2 & -3 \\ 2 & 4 & 1 \end{bmatrix}$.

24. (a) $[X]_{\mathcal{T}} = (-7,4)$ e $[X]_{\mathcal{S}} = (1,3)$; (b) $Z = (-5,-8)$; (c) $M = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}$; (d) $[X]_{\mathcal{S}} = M[X]_{\mathcal{T}} = (1,3)$; (e) $N = \begin{bmatrix} -1 & -2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$. (f) $[X]_{\mathcal{T}} = N[X]_{\mathcal{S}} = (-7,4)$

25. $\mathcal{T} = \{(1,1,1),(0,1,0),(-1,2,2)\}$.

26. (a) Não; (b) sim.

27. $a = b = \frac{1}{2}$ ou $a = b = -\frac{1}{2}$.

28. (b) $[X]_{\mathcal{B}} = (\frac{7}{5},1,\frac{1}{5})$. (c) $M = \frac{1}{5}\begin{bmatrix} 3 & 3 & 7 \\ 0 & 5 & 5 \\ 4 & 4 & 1 \end{bmatrix}$. (d) $[Y]_{\mathcal{B}} = (6,5,3)$.

30. (a) $\left(\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, 0\right), (0,0,1)\right)$; (b) $(0,0,1)$; (c) $\frac{\sqrt{2}}{2}$.

31. $\operatorname{proj}_{\mathcal{W}} X = \left(1 - \frac{9\sqrt{3}}{4}, 0, \sqrt{3} - \frac{27}{4}\right)$ e $\operatorname{proj}_{\mathcal{W}} Y = \left(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{4}, 7, \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{3}{4}\right)$.

32. (a) Verdadeira. (b) Falsa. (c) Falsa. (d) Verdadeira. (e) Falsa. (f) Falsa. (g) Verdadeira. (h) Falsa. (i) Falsa. (j) Verdadeira.