

Álgebra Linear e Geometria Analítica

Agrupamento IV: Mestrado Integrado em Eng.^a Eletrónica e Telecomunicações | Mestrado Integrado em Eng.^a de Computadores e Telemática | Licenciatura em Eng.^a Informática

30 de Outubro de 2019

Duração: 1h30

1^a prova de avaliação

Justifique devidamente todas as suas respostas.

1. Considere o sistema de equações lineares nas incógnitas x, y e z e com os parâmetros $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

$$\begin{cases} \alpha y + 2z = \alpha \\ x + \alpha y + 3z = 0 \\ \alpha x + z = \beta \end{cases}$$

- (a) Determine os valores de α e de β para os quais o sistema é

- i. possível e determinado;
- ii. possível e indeterminado;
- iii. impossível.

- (b) Faça $\alpha = 1$ e $\beta = -1$. Determine o conjunto de soluções do sistema.

2. Considere A e B , matrizes 4×4 tais que $\det(A) = 3$ e

$$B = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 3 & -1 \end{bmatrix}.$$

- (a) Verifique que B é invertível.

- (b) Calcule $\det(2A^T B^{-1})$.

3. Sejam A, B e C matrizes quadradas tais que $AB = AC$.

- (a) Mostre que, se $\det(A) \neq 0$, então $B = C$.

- (b) Verifique ainda, usando um exemplo em que A não é a matriz nula, que esta conclusão pode não ser válida se $\det(A) = 0$.

4. Em \mathbb{R}^3 considere o ponto $P(1, -1, 1)$, a reta \mathcal{R} de equações cartesianas $\begin{cases} 2y + z = -1 \\ 2x + 3y + z = -1 \end{cases}$ e o plano \mathcal{P} de equação cartesiana $2x + 3y + z = -1$.

- (a) Obtenha a equação cartesiana do plano que passa no ponto $P(1, -1, 1)$ e é ortogonal à reta \mathcal{R} .

- (b) Indique a posição relativa da reta \mathcal{R} e do plano \mathcal{P} . Qual a distância entre ambos?

- (c) Determine a distância do ponto P ao plano \mathcal{P} .

5. Considere o sistema de equações lineares $AX = B$, cuja matriz ampliada $[A|B]$ é equivalente por linhas à matriz $[C|D]$ seguintes

$$[A|B] = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & a & 1 & -1 \\ a & a & 1 & -1 \end{array} \right], \quad [C|D] = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & a & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1-a & -1-a \end{array} \right],$$

sendo a um parâmetro real. Indique, justificando, os valores de a para os quais:

- (a) $(1, -1, -1) \in \mathcal{C}(A)$, sendo $\mathcal{C}(A)$ o conjunto de todas as combinações lineares das colunas de A ;

- (b) a reta \mathcal{R}' de equações cartesianas $\begin{cases} ay + z = -1 \\ ax + ay + z = -1 \end{cases}$ é estritamente paralela ao plano \mathcal{P}' de equação cartesiana $x + y + z = 1$.

Questão	1	2	3	4	5
Cotação	5	4	4	4,5	2,5