Cálculo I – cp. 4 – 2021/22 – exame de recurso

Resolução:

6. $\sum_{n=1}^{+\infty} \left(1 - \frac{\ln n}{n}\right)^n$

Nota que $\frac{\ln n}{n} < 1$

(a) $\sqrt[n]{\left|\left(1 - \frac{\ln n}{n}\right)^n\right|} = 1 - \frac{\ln n}{n} \xrightarrow[n \to +\infty]{} 1$

(5 pontos)

O Critério de Cauchy aplicado a $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ apenas permite concluir quando $\lim_{n \to +\infty} \sqrt[n]{|a_n|} \neq 1$ (quando a série (absolutamente) convergente quando esse limite dá < 1 e divergente quando esse limite dá > 1 ou $+\infty$). Como no caso presente dá 1, nada permite concluir.

(b) $\lim_{x \to +\infty} \left(1 - \frac{\ln x}{x}\right)^x$ dá uma indeterminação 1^∞.

(15 pontos)

Logaritmizando:

$$\ln\left(1 - \frac{\ln x}{x}\right)^x = x \cdot \ln\left(1 - \frac{\ln x}{x}\right) = \frac{\ln\left(1 - \frac{\ln x}{x}\right)}{\frac{1}{x}}$$

dá uma indeterminação $\frac{0}{0}$ quando $x \to +\infty$.

Como $\lim_{x \to +\infty} \frac{\frac{-\frac{x \cdot 1/x - \ln x}{x^2}}{1 - \ln x/x}}{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{x \to +\infty} \frac{1 - \ln x}{1 - \frac{\ln x}{x}} = -\infty$,

pela Regra de Cauchy temos que $\frac{\ln\left(1 - \frac{\ln x}{x}\right)}{1/x}$

$$\lim_{x \to +\infty} \left(1 - \frac{\ln x}{x}\right)^x = \lim_{x \to +\infty} e^{\frac{\ln\left(1 - \frac{\ln x}{x}\right)}{1/x}} = 0.$$

(c) Como consequência da alínea anterior, também $\lim_{n \to +\infty} \left(1 - \frac{\ln n}{n}\right)^n = 0$,

(10 pontos) ou seja, o termo geral da série tem limite zero quando $n \to +\infty$.

É sabido que isso não é suficiente para determinar a natureza da série