Departamento de Matemática, Universidade de Aveiro — Matemática Discreta

Exame final, 14 de Junho de 2023, Duração: **2h30m** **D** Classificação: ____________

Nome: ______________________________ Nº Mec.: ____________

Declaro que desisto: ______________________________ Folhas supl.: ______

7. (4 val) Seja G o seguinte grafo simples não orientado com custos nas arestas representado na figura 1.

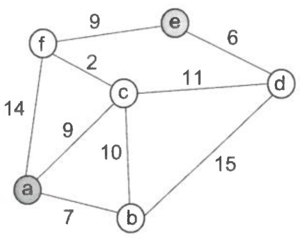


Figura 1: O grafo G

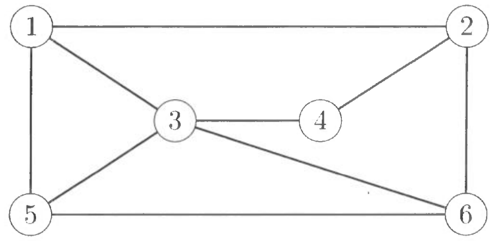


Figura 2: O grafo J

a) Considere o subgrafo H de G induzido pelo conjunto de vértices $\{a, b, c, d, f\}$. Determine o número $\tau(H)$ de árvores abrangentes de H, aplicando a fórmula recursiva $\tau(H) = \tau(H - e) + \tau(H//e)$, sendo e uma aresta de H que não é lacete. Justifique.

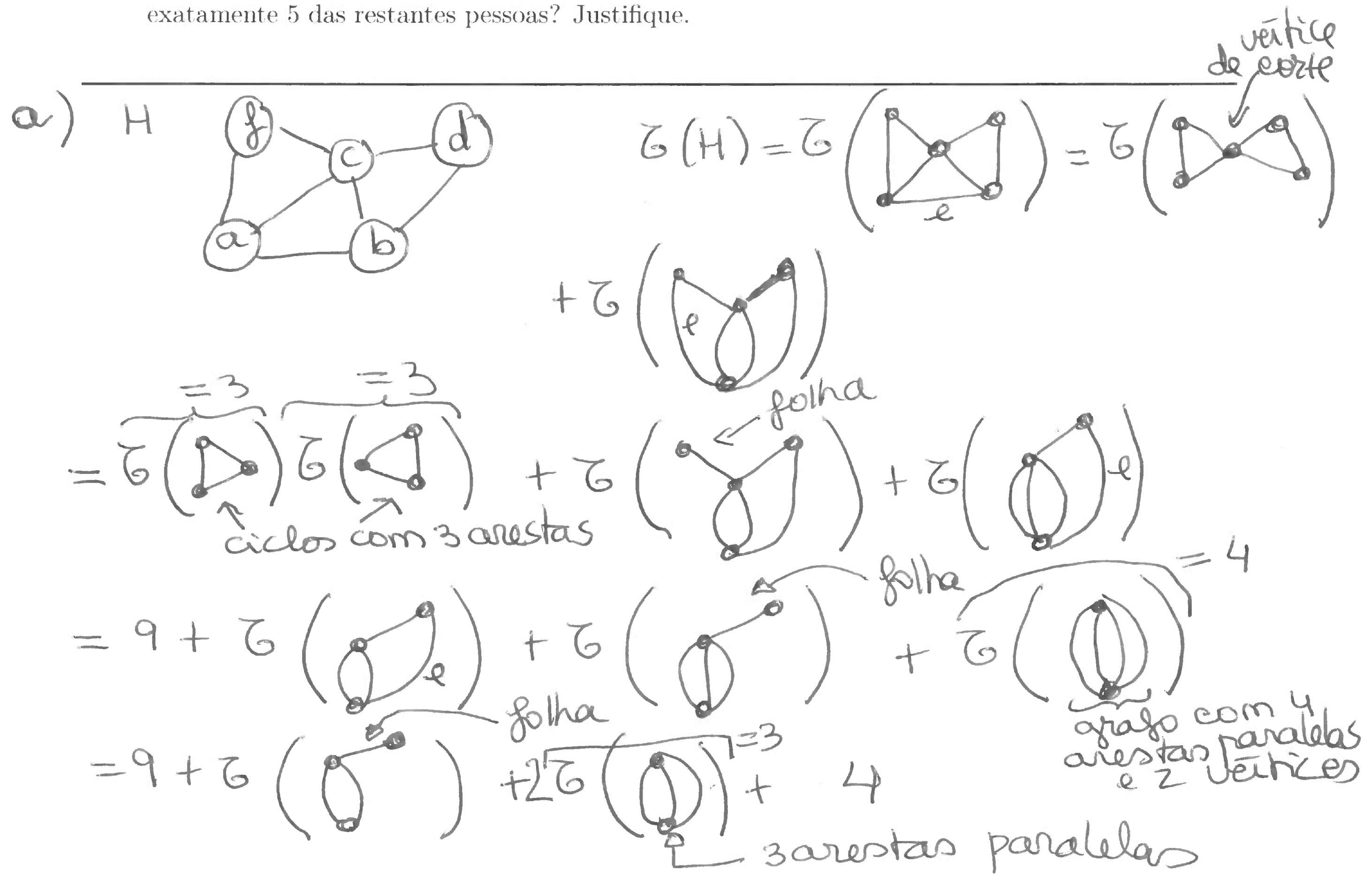
b) Determine um caminho de custo mínimo entre os vértices **a** e **e** em G, aplicando o algoritmo de Dijkstra. Apresente todos os passos do algoritmo usando uma tabela adequada e indique o custo total do caminho determinado.

c) Seja J o grafo simples indicado na figura 2. Os grafos G e J são isomorfos? Justifique devidamente e, no caso afirmativo, indique o respetivo isomorfismo.

8. (1 val) Numa festa onde estão 31 pessoas é possível que cada uma destas pessoas conheça exatamente 5 das restantes pessoas? Justifique.

---

a) H



$= 9 + 2\Big($  $\Big) + 2 \times 3 + 4 = 9 + 2 + 6 + 4 = 21$

$\underbrace{\quad}_{=2}$ 2 arestas paralelas

4\. b) Início (a) Fim (e)

i	a	b	c	d	e	f	Menor	Temp.
0	$(0,-)$	$(\infty,-)$	$(\infty,-)$	$(\infty,-)$	$(\infty,-)$	$(\infty,-)$	a	b, c, d, e, f
1	//	$(7,a)$	$(9,a)$	$(\infty,-)$	$(\infty,-)$	$(14,a)$	b	c, d, e, f
2	//	//	$(9,a)$	$(22,b)$	$(\infty,-)$	$(14,a)$	c	d, e, f
3	//	//	//	$(20,c)$	$(\infty,-)$	$(11,c)$	f	d, e
4	//	//	//	$(20,c)$	$(20,f)$	//	e	d

custo do caminho: marca(e) = 20

ant(e) = f, ant(f) = c, ant(c) = a

caminho: (a, c, f, e)

4.c) O grafo G tem um único vértice de grau 2 (vértice e) e um único vértice de grau 4 (vértice c). O grafo J também tem um único vértice de grau 2 (vértice 4) e um único vértice de grau 4 (vértice 3). Os vértices e e c não são adjacentes em G mas os vértices 3 e 4 são adjacentes em J. Logo, G e J não são isomorfos porque não existe uma função bijetiva $h: V(G) \to V(J)$ que preserve as adjacências, ou seja, tal que, para $u, v \in V(G)$, u é adjacente a v se e só se $h(u)$ é adjacente a $h(v)$.

5\) Consideremos um grafo G tal que o conjunto dos vértices é o conjunto das 31 pessoas. Sabemos que $\sum_{v \in V(G)} d_G(v) = 2|E(G)|$. Se $d_G(v) = 5$, para todo o vértice v obtinhamos $31 \times 5 = 2|E(G)|$ $\Leftrightarrow |E(G)| = \frac{155}{2} \notin \mathbb{N}$. Logo, a resposta é: "não é possível".