Produto Interno, Distâncias, Projeção ortogonal, Mínimos Quadrados

Álgebra Linear e Geometria Analítica A **Soluções da Folha Prática 4**

---

1. (a) $u+v=(0,-1,1)$ e $3u-2v=(5,-8,3)$.
   (b) Não. Não.
   (c) i. $5\pi/6$; ii. $\pi/6$; iii. $\arccos\frac{2\sqrt{7}}{7}$.
   (d) $\left(\frac{\sqrt{6}}{6},-\frac{\sqrt{6}}{3},\frac{\sqrt{6}}{6}\right)$ ou $\left(-\frac{\sqrt{6}}{6},\frac{\sqrt{6}}{3},-\frac{\sqrt{6}}{6}\right)$.
   (e) i. $\frac{\sqrt{6}}{3}(1,-2,1)$; ii. $-\frac{\sqrt{6}}{3}(1,-2,1)$.
   (f) $u=-\frac{3}{2}(-1,1,0)+\left(-\frac{1}{2},-\frac{1}{2},1\right)$.
   (g) $\alpha(1,1,1)$, $\alpha\in\mathbb{R}$.
   (h) $\alpha(1,0,-1)+\beta(0,1,2)$, $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$.
2. Dois lados do triângulo têm comprimento $\sqrt{41}$.
3. $\left(\frac{1}{3}\sqrt{3y^2+3z^2},y,z\right)$, $y,z\in\mathbb{R}$.
5. (a) $(-1,2,4)$.
6. (b) i. $\sqrt{66}$; ii. $\frac{\sqrt{3}}{2}$; iii. 2.
7. (a) $\alpha(2,-1,-3)$, $\alpha\in\mathbb{R}$.
   (b) $\sqrt{14}$.
9. Uma equação vetorial da reta $\mathcal{R}$ é $(x,y,z)=(1,1,0)+\alpha(0,1,1)$, $\alpha\in\mathbb{R}$; uma equação vetorial do plano $\mathcal{P}$ é $(x,y,z)=(2,2,1)+\alpha(0,1,1)+\beta(1,1,1)$, $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$, e uma equação cartesiana de $\mathcal{P}$ é $y-z=1$.
10. Todos os pontos do plano de equação cartesiana $2x-y-z+1=0$.
11. (a) $(x,y,z)=(3,\frac{1}{2},-\frac{7}{2})+\alpha(0,1,1)$, $\alpha\in\mathbb{R}$; (b) $\sqrt{2}$.
12. (a) 2x+z=3; (b) $\frac{8\sqrt{5}}{5}$.
13. (a) $x-z+3=0$; (b) 1.
14. (a) Não;
    (b) Sim.
15. $a=b=\frac{1}{2}$ ou $a=b=-\frac{1}{2}$.
16. (b) $[X]_{\mathcal{B}}=\begin{bmatrix}7/5\\1\\1/5\end{bmatrix}$. (c) $\begin{bmatrix}3/5&3/5&7/5\\0&1&1\\4/5&4/5&1/5\end{bmatrix}$. (d) $[Y]_{\mathcal{B}}=\begin{bmatrix}6\\5\\3\end{bmatrix}$.
18. (a) $\left((\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{\sqrt{2}}{2},0),(0,0,1)\right)$;
    (b) $(0,0,1)$;
    (c) $\sqrt{2}/2$.
19. $\mathrm{proj}_{\mathcal{W}}X=\left(1-9\sqrt{3}/4,0,\sqrt{3}-27/4\right)$, $\mathrm{proj}_{\mathcal{W}}Y=\left(1/2-\sqrt{3}/4,7,\sqrt{3}/2-3/4\right)$.
20. (a) Verdadeira. (b) Falsa. (c) Verdadeira
21. (a) $\left((\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{\sqrt{2}}{2},0),(-\frac{\sqrt{6}}{6},\frac{\sqrt{6}}{6},\frac{\sqrt{6}}{3})\right)$;
    (b) $\left((0,0,1,0),\frac{\sqrt{3}}{3}(1,1,0,1),\frac{\sqrt{78}}{78}(-2,7,0,-5)\right)$.
22. O erro dos mínimos quadrados é $\sqrt{84}$ para qualquer $x\in\mathbb{R}^2$.

23. (a) Uma solução dos mínimos quadrados é $\hat{x} = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \end{bmatrix}^T$. O erro dos mínimos quadrados é zero porque b pertence ao espaço das colunas de A.

(b) Se b é ortogonal ao espaço das colunas de A então a projeção de b no espaço das colunas de A é 0. Neste caso uma solução dos mínimos quadrados $\hat{x}$ de $Ax = b$ satisfaz $A\hat{x} = 0$.

24. 1.

(a) As equações normais são: $A^T A)x = A^T b$: $\begin{bmatrix} 6 & -11 \\ -11 & 22 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 \\ 11 \end{bmatrix}$.

(b) $\hat{x} = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix}$.

24. 2.

(a) As equações normais são: $A^T A)x = A^T b$: $\begin{bmatrix} 12 & 8 \\ 8 & 10 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -24 \\ -2 \end{bmatrix}$.

(b) $\hat{x} = \begin{bmatrix} -4 \\ 3 \end{bmatrix}$.

24. 3.

(a) As equações normais são: $A^T A)x = A^T b$: $\begin{bmatrix} 6 & 6 \\ 6 & 42 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ -6 \end{bmatrix}$.

(b) $\hat{x} = \begin{bmatrix} 4/3 \\ -1/3 \end{bmatrix}$.

24. 4.

(a) As equações normais são: $A^T A)x = A^T b$: $\begin{bmatrix} 3 & 3 \\ 3 & 11 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ 14 \end{bmatrix}$.

(b) $\hat{x} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$.