Álgebra Linear e Geometria Analítica

O determinante

Departamento de Matemática Universidade de Aveiro

Determinante de uma matriz quadrada

Existe uma única função que a cada matriz quadrada A de colunas $C_1, \ldots, C_n$ faz corresponder um escalar real $\det(A)$, satisfazendo:

1. $\det(I_n) = 1$,
2. $det(C_1, \ldots, C_i, \ldots, C_j, \ldots, C_n) = -det(C_1, \ldots, C_j, \ldots, C_i, \ldots, C_n)$,
3. $det(C_1, \ldots, \alpha C_i, \ldots, C_n) = \alpha det(C_1, \ldots, C_i, \ldots, C_n)$,
4. $det(C_1, \ldots, \widehat{C}_i + \widetilde{C}_i, \ldots, C_n) = det(C_1, \ldots, \widehat{C}_i, \ldots, C_n) + det(C_1, \ldots, \widetilde{C}_i, \ldots, C_n)$,

para cada $\alpha \in \mathbb{R}$, $i, j \in \{1, \ldots, n\}$, $i \neq j$ e $C_i = \widehat{C}_i + \widetilde{C}_i$.

A função $\det(A)$ designa-se por determinante de A. Esta função também é frequentemente denotada por $|A|$.

Determinante das matrizes 1×1 e 2×2

- Se $A = [a_{11}]$ então $\det(A) = a_{11}$.

  Exemplo: se $A = [-11]$ então $\det(A) = -11$.

- Se $A = \begin{bmatrix} C_1 & C_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$ então

$$\det(A) = a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}$$

  Exemplo

  Se $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$, então $\det(A) = 1 \times 4 - 3 \times 2 = -2$.

  Exercício: Verifique as propriedades 1-4 da definição de determinante, para matrizes 2×2.

Determinante das matrizes 3×3

$$A = \begin{bmatrix} C_1 & C_2 & C_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} \det(A) = \quad & a_{11}a_{22}a_{33} + a_{21}a_{32}a_{13} + a_{31}a_{12}a_{23} \\ & - a_{31}a_{22}a_{13} - a_{11}a_{32}a_{23} - a_{21}a_{12}a_{33} \end{aligned}$$

Regra de Sarrus (só para matrizes 3×3)

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

$$\begin{array}{lccc}
+a_{11}a_{22}a_{33} & & & \\
+a_{21}a_{32}a_{13} & a_{11} & a_{12} & a_{13} \\
+a_{31}a_{12}a_{23} & a_{21} & a_{22} & a_{23} \\
 & a_{31} & a_{32} & a_{33} \\
-a_{31}a_{22}a_{13} & a_{11} & a_{12} & a_{13} \\
-a_{11}a_{32}a_{23} & a_{21} & a_{22} & a_{23} \\
-a_{21}a_{12}a_{33} & & &
\end{array}$$

$$\det(A) = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{21}a_{32}a_{13} + a_{31}a_{12}a_{23} - a_{31}a_{22}a_{13} - a_{11}a_{32}a_{23} - a_{21}a_{12}a_{33}$$

Regra de Sarrus - Exemplo

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{array}{rccc} +(1)(1)(2) & & & \\ +(1)(3)(3) & 1 & 2 & 3 \\ +(2)(2)(0) & 1 & 1 & 0 \\ & 2 & 3 & 2 \\ -(2)(1)(3) & 1 & 2 & 3 \\ -(1)(3)(0) & 1 & 1 & 0 \\ -(1)(2)(2) & & & \end{array}$$

$$\det(A) = 2 + 9 + 0 - 6 - 0 - 4 = 1$$

Menor, cofator e adjunta

Dada uma matriz $A = [a_{ij}]$ $n \times n$, seja M_{ij} a matriz $(n-1) \times (n-1)$ que se obtém de A por eliminação da sua linha i e coluna j.

- O menor de a_{ij} é $\det(M_{ij})$.
- O cofator (ou complemento algébrico) de a_{ij} é $A_{ij} = (-1)^{i+j} \det(M_{ij})$.
- A adjunta de A é a matriz $n \times n$ $\operatorname{adj} A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & \cdots & A_{1n} \\ A_{21} & A_{22} & \cdots & A_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ A_{n1} & A_{n2} & \cdots & A_{nn} \end{bmatrix}^T$

Exemplo

Relativamente à matriz A do exemplo anterior,

$$det(M_{21}) = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = -5, \quad A_{21} = (-1)^{2+1} det(M_{21}) = 5 \quad \text{e} \quad \operatorname{adj} A = \begin{bmatrix} 2 & 5 & -3 \\ -2 & -4 & 3 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}.$$

Teorema de Laplace

Teorema:

Seja $A = [a_{ij}]$ uma matriz de ordem n. Então

- para cada $i = 1, \ldots, n$,
$$\det(A) = a_{i1}A_{i1} + \cdots + a_{in}A_{in}$$
(desenvolvimento de Laplace do $\det(A)$ a partir da linha i);

- para cada $j = 1, \ldots, n$,
$$\det(A) = a_{1j}A_{1j} + \cdots + a_{nj}A_{nj}$$
(desenvolvimento de Laplace do $\det(A)$ a partir da coluna j).

Corolário:
O determinante de uma matriz triangular é o produto das entradas na diagonal.

Teorema de Laplace

Cálculo do determinante de uma matriz 3×3:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix},$$

pelo Teorema de Laplace, por expansão a partir da primeira linha, obtém-se

$$\det(A) = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + a_{13}A_{13} =$$

$$a_{11}(-1)^{1+1}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{12}(-1)^{1+2}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13}(-1)^{1+3}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

$$= a_{11}a_{22}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31}.$$

Teorema de Laplace – Exemplo

Considere-se, novamente, a matriz

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 2 \end{bmatrix}$$

Cálculo do det(A) pelo Teorema de Laplace, por expansão a partir da terceira coluna:

$$\begin{aligned} \det(A) &= 3\,A_{13} + 0\,A_{23} + 2\,A_{33} \\ &= 3(-1)^{1+3} \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} + 2(-1)^{3+3} \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \\ &= 3(3-2) + 2(1-2) \\ &= 1. \end{aligned}$$

Propriedades do determinante

Para além das propriedades enunciadas na definição, o determinante também tem as seguintes propriedades:

5. $\det(A) = \det(A^T)$, logo as propriedades válidas para colunas (linhas) são válidas para linhas (colunas).

6. Se A tem uma linha (coluna) nula, ou duas linhas (colunas) iguais, então $\det(A) = 0$.

7. Se B resulta de A por uma troca de duas linhas (colunas), $L_i \leftrightarrow L_j$, então $\det(B) = -\det(A)$.

8. Se B resulta de A por multiplicação de uma linha (coluna) de A por um escalar α, $L_i := \alpha L_i$, então $\det(B) = \alpha \det(A)$.

9. Se B resulta de A substituindo a linha i pela sua soma com um múltiplo da linha j, $L_i := L_i + \alpha L_j$, então $\det(B) = \det(A)$.

10. $\det(AB) = \det(A)\det(B)$.

Nota: $\det(A + B) \neq \det(A) + \det(B)$.

Determinante, adjunta e inversa de uma matriz

Teorema

A é invertível $\Leftrightarrow$ $\det(A) \neq 0$.

Corolário

Seja A $n \times n$. O sistema homógeneo $AX = 0$ tem uma solução não trivial se e só se $\det(A) = 0$.

Teorema

Seja A invertível. Então

- $\det(A^{-1}) = \dfrac{1}{\det(A)}$;
- $A^{-1} = \dfrac{1}{\det(A)} \operatorname{adj} A$.

Regra de Cramer

Seja A $n \times n$ tal que $\det(A) \neq 0$.

Então o sistema $AX = B$ é possível e determinado e a sua única solução é

$$X = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix},$$

com

$$x_j = \frac{\det(A_j)}{\det(A)}, \qquad j = 1, \ldots, n,$$

onde A_j se obtém de A por substituição da sua coluna j pela coluna B.

Regra de Cramer – Exemplo

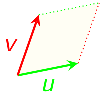
$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 1 \\ x_1 + 2x_3 = 0 \\ 2x_1 - x_2 + x_3 = 1 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 2 & -1 & 1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Como $\det(A) = 4 \neq 0$, o sistema pode ser resolvido pela Regra de Cramer.

$$x_1 = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix}}{\det(A)} = \frac{4}{4} = 1, \qquad x_2 = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix}}{\det(A)} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}, \qquad x_3 = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 1 \end{vmatrix}}{\det(A)} = \frac{-2}{4} = -\frac{1}{2}.$$

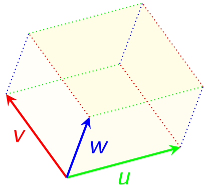
Significado geométrico do determinante

Área de um paralelogramo



$$\text{Área}(u, v) = |\det(A)| \quad \text{para} \quad A = \begin{bmatrix} u & v \end{bmatrix} \quad \text{matriz } 2 \times 2$$

Volume de um paralelepípedo



$$\text{Volume}(u, v, w) = |\det(A)| \quad \text{para} \quad A = \begin{bmatrix} u & v & w \end{bmatrix} \quad \text{matriz } 3 \times 3$$