departamento de física

MECÂNICA E CAMPO ELETROMAGNÉTICO

ano letivo 2023/2024

Série 1

Campo Elétrico

Distribuições de carga

1. A densidade linear de carga dum bastão de comprimento **L** é dada por : $\lambda = \lambda_0 + 2x$, $0 \leq x \leq L$. Qual é a carga total do bastão?

Solução: $Q = \lambda_0 L + L^2$

2. Um disco de raio $\boldsymbol{R}$ tem uma densidade de carga dada por $\boldsymbol{\sigma} = 3r$. Calcule a carga total do disco.

Solução: $Q = 2\pi R^3$

3. Uma coroa esférica de raios $\boldsymbol{r_1}$ e $\boldsymbol{r_2}$ com $\boldsymbol{r_1} < \boldsymbol{r_2}$, tem uma densidade de carga que é inversamente proporcional ao raio. Sabendo que a carga total da coroa é $\boldsymbol{Q}$, obtenha uma expressão para a densidade de carga.

Solução: $\rho = \frac{Q}{2\pi\,(r_2^2 - r_1^2)\,r}$

Lei de Coulomb. Campo e Potencial Elétricos

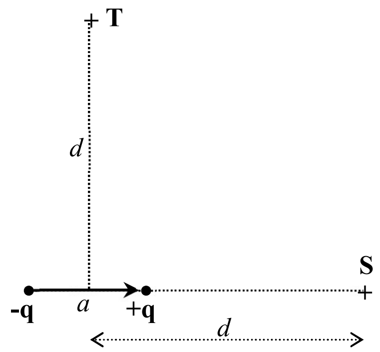
4. Quatro cargas $+q$,$+q$, $-q$,$-q$ estão colocadas nos vértices dum quadrado de lado $\boldsymbol{a}$.

a) Determine, para os dois casos de distribuição das cargas, o campo elétrico e o potencial no centro do quadrado.

b) Escolha uma linha apropriada e verifique que $\int_\Gamma \vec{E}\,.\,\vec{dl} = 0$

Solução: $\vec{E} = \frac{q\sqrt{2}}{\pi\varepsilon_0 a^2}\ \hat{k}\ e\ V = 0\ ;\ \vec{E} = \vec{0}\ e\ V = 0$

5. Duas cargas iguais e de sinais contrários, com uma distância constante entre si constituem um dipolo (ver figura).



a) Mostre que o campo elétrico em $\boldsymbol{S}$ é paralelo ao vetor $\vec{\boldsymbol{a}}$, e em $\boldsymbol{T}$ tem o sentido contrário.

b) Determine o campo elétrico em $\boldsymbol{T}$ e em $\boldsymbol{S}$, fazendo aproximações adequadas ($\boldsymbol{d} >> \boldsymbol{a}$). Introduza no resultado o vector momento dipolar elétrico, $\vec{\boldsymbol{P}} = \boldsymbol{q}\vec{\boldsymbol{a}}$

c) Mostre que um dipolo colocado num campo elétrico uniforme $\vec{\boldsymbol{E}}$ fica sujeito a um binário cujo momento é $\vec{\boldsymbol{M}} = \vec{\boldsymbol{P}} \times \vec{\boldsymbol{E}}$.

Solução: $\vec{E}(S) = \frac{1}{2\pi\varepsilon_0}\frac{\vec{p}}{d^3}\ ;\ \vec{E}(T) = -\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\vec{p}}{d^3}$

6. Considere um anel de raio $\boldsymbol{R}$ carregado uniformemente com uma carga total $\boldsymbol{Q}$.

a) Calcule o campo elétrico no centro do anel.

b) Calcule o campo elétrico num ponto do eixo do anel, distante de $\boldsymbol{d}$ do seu centro

i) a partir da lei de Coulomb.

ii) A partir do potencial

Solução: $\vec{E}(O) = \vec{0}\ \ ;\ \ E = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q\,d}{(R^2+d^2)^{3/2}}\ \ ;\ \ V = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{(R^2+d^2)^{1/2}}$

7. Um fio semi-circular de raio $\boldsymbol{R}$ está uniformemente carregado com uma carga total $\boldsymbol{Q}$. Encontre o vetor campo elétrico no centro de curvatura.

Solução: $E = \frac{Q}{2\varepsilon_0 \pi^2 R^2}$

8. Determine a partir da lei de Coulomb o campo e o potencial criados por um fio infinito, carregado com uma densidade linear de carga constante $\boldsymbol{\lambda}$.

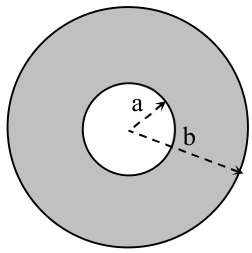
Solução: $\vec{E} = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 r}\ \hat{u}_r\ \ e\ \ V = \frac{-\lambda}{2\pi\varepsilon_0} ln\, r + const.$ há cargas no infinito…

9. Determine, a partir da lei de Coulomb o, campo e o potencial criados num ponto do eixo (à distância $\boldsymbol{x}$) dum disco de raio $\boldsymbol{R}$, uniformemente carregado com uma densidade superficial de carga σ. Estude o caso limite $R \to \infty$?

Solução: $\vec{E} = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\left(1 - \frac{x}{\sqrt{x^2+R^2}}\right)\ \hat{u}_x\ \ e\ \ V = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}(\sqrt{x^2+R^2} - |x|)$

quando $R \to \infty$, $E \to \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}$ como o caso do plano infinito (σ)

10. Um anel circular, de raio interior $\boldsymbol{a}$ e de raio exterior $\boldsymbol{b}$ ($a < b$), tem uma densidade superficial de carga $\boldsymbol{\sigma}$ constante.



a) Calcule o potencial num ponto P do eixo da coroa, à distância $\boldsymbol{x}$ do centro.
b) Deduza a expressão do campo elétrico em P.
c) Verifique que no limite em que $a \to 0$, as expressões acima tendem para o caso do disco uniformemente carregado.

Solução:

$V(P) = \frac{\sigma}{2\varepsilon_o}\left(\sqrt{x^2+b^2} - \sqrt{x^2+a^2}\right)$ e $\vec{E} = \frac{\sigma}{2\varepsilon_o}\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+a^2}} - \frac{x}{\sqrt{x^2+b^2}}\right)\ \hat{u}_x$

11. Uma superfície hemisférica fina de raio $\boldsymbol{R}$, com a base situada no plano $\boldsymbol{xy}$, tem uma carga $\boldsymbol{Q}$ uniformemente distribuída. Encontre o campo elétrico e o potencial no centro de curvatura $\boldsymbol{O}$, origem do sistema de eixos.

Solução: $\vec{E}(O) = -\frac{\sigma}{4\varepsilon_o}\ \hat{u}_z = -\frac{Q}{8\pi\varepsilon_o R^2}\ \hat{u}_z$; $V(O) = \frac{\sigma}{2\varepsilon_o}\ R$

12. Um fio de comprimento $\boldsymbol{L}$, centrado na origem dum sistema de eixos $\boldsymbol{xy}$ e paralelo ao eixo-$\boldsymbol{xx}$, está carregado uniformemente com uma densidade de cargas dada por $\boldsymbol{\lambda}$ Cm^{-1}.
a) Determine a expressão do campo elétrico num ponto genérico ao longo do fio, fora e dentro do fio.
b) Determine o campo elétrico nos pontos que se situam ao longo da reta que é perpendicular ao fio e passa pelo ponto médio deste.

Solução: $E_{fora}(x) = \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{1}{x-\frac{L}{2}} - \frac{1}{x+\frac{L}{2}}\right]$; $E_{dentro}(x) = \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{1}{\frac{L}{2}-x} - \frac{1}{\frac{L}{2}+x}\right]$; $E(y) = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0}\left[\frac{L}{y(L^2+4y^2)^{1/2}}\right]$

Aplicações do teorema de Gauss

13. Uma esfera de centro A e de raio a está carregada com uma densidade volúmica uniforme $\boldsymbol{\rho}$, exceto numa cavidade esférica de centro B e de raio b**,** que não contem cargas. Mostre que o campo eléctrico dentro da cavidade é uniforme e encontre uma expressão para ele.

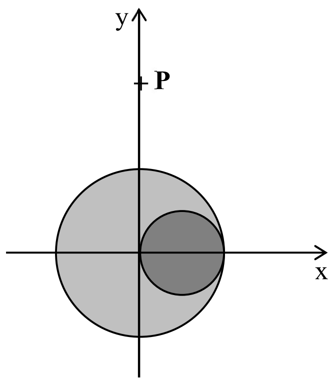
Solução: $\vec{E} = \frac{\rho}{3\varepsilon_o}\ \vec{AB}$

14. Linhas de *força* emergem radialmente duma superfície esférica e têm uma densidade uniforme ao longo da superfície. Quais são as possíveis distribuições de carga dentro da esfera?

Solução: $\rho(r)$; $\sigma(r)$

15. Considere uma esfera isoladora de raio $\boldsymbol{R}$ que tem uma carga distribuída uniformemente com densidade volúmica $\boldsymbol{\rho}$, exceto numa região esférica de raio $\boldsymbol{R}/\boldsymbol{2}$, como se representa na figura. Nessa região a densidade volúmica é $\boldsymbol{2\rho}$.

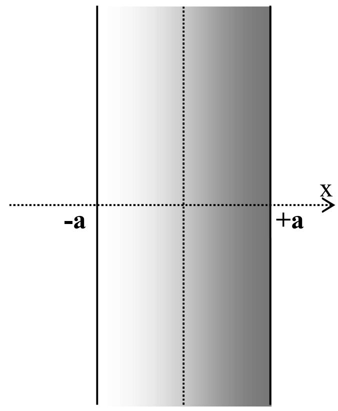
a) Calcule o campo elétrico em qualquer ponto do eixo $\boldsymbol{xx}$. Considere as várias regiões onde o campo é diferente.
b) Calcule o campo elétrico no ponto $\boldsymbol{P}$ do eixo $\boldsymbol{yy}$, à distância $\boldsymbol{2R}$, do centro da esfera.
c) Qual o valor do campo elétrico no ponto $\boldsymbol{P}$, se a esfera de raio $\boldsymbol{R}/\boldsymbol{2}$ fosse comprimida até ficar com raio nulo, mantendo a carga total das duas regiões constante.
d) Determine o fluxo através de uma esfera concêntrica com a esfera na origem, e que passa por $\boldsymbol{P}$.



16. Determine o campo elétrico em qualquer ponto do espaço devido a um plano infinito uniformemente carregado:
a) A partir da lei de Coulomb.
b) Usando a lei de Gauss.
Justifique o cálculo.

Solução: $\vec{\boldsymbol{E}} = \frac{\boldsymbol{\sigma}}{\boldsymbol{2\varepsilon_0}}\vec{\boldsymbol{n}}$

17. Considere que no espaço limitado por dois planos infinitos e paralelos (***x=a*** e ***x=-a***), existe uma distribuição de carga $\boldsymbol{\rho} = \boldsymbol{\alpha x}$.

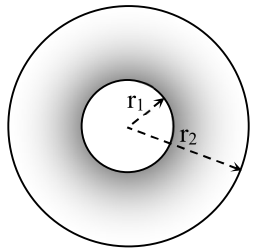


a) Determine a carga por unidade de área existente entre os planos.
b) Mostre que o campo no exterior é nulo.
c) Determine o campo em cada ponto no interior dos planos.
d) Represente graficamente $\left|\vec{E}\right|$ em função de ***x***.
e) Que densidade de carga σ deveria ter a superfície dos planos, sem carga no interior, para o campo ter o mesmo valor em $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ que na situação anterior?

Solução: a) $Q = 0$; b) $\vec{E}_{ext} = \vec{0}$; c) $E\,\frac{\alpha}{2\varepsilon_o}(a^2 - x^2)_{int}$

d) porção de parábola para $-a \leq x \leq +a$; e) $\sigma = \frac{\alpha a^2}{2}$

18. Considere uma coroa esférica de raios interno $\boldsymbol{r_1}$ e externo $\boldsymbol{r_2}$ com uma densidade de carga $\boldsymbol{\rho} = \frac{\boldsymbol{\alpha}}{\boldsymbol{r}}$.

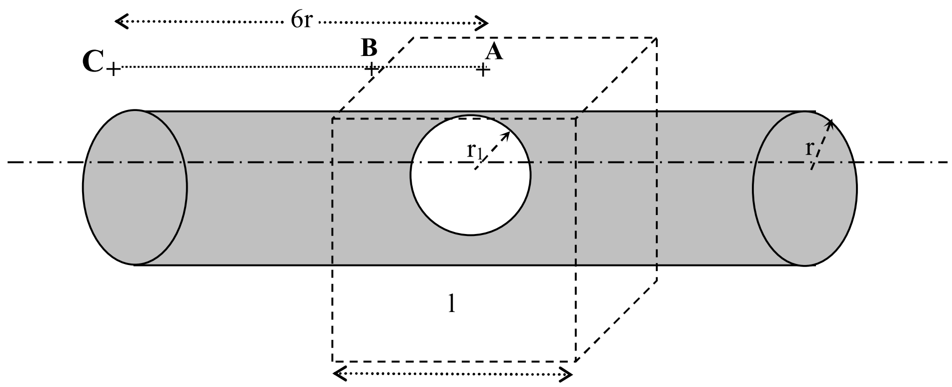


a) Determine o campo elétrico em qualquer ponto do espaço.
b) Que tipo de distribuição poderia criar um campo uniforme no interior da coroa esférica?

Solução: $r < r_1 \Rightarrow E = 0$; $r_1 < r < r_2 \Rightarrow E = \frac{\alpha}{2\varepsilon_0 r^2}(r^2 - r_1^2)$

$r > r_2 \Rightarrow E = \frac{\alpha}{2\varepsilon_0 r^2}(r_2^2 - r_1^2)$

19. Considere a seguinte distribuição de cargas ρ num cilindro infinito de raio $\boldsymbol{r}$, onde existe um vazio esférico de raio $r_1 < r$ e com centro sobre o eixo.



a) Determine o fluxo do campo elétrico através de um cubo de aresta $\boldsymbol{l} > \boldsymbol{2r}$, de tal modo que o cilindro o atravesse, nos casos em que:
   i - no interior do cubo se encontra o espaço vazio.
   ii - o interior do cubo não inclui esse espaço.
b) Mostre que estes cálculos não lhe permitem calcular o campo $\vec{\boldsymbol{E}}$ em qualquer ponto do espaço.
c) Usando o princípio da sobreposição determine o campo elétrico nos pontos $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$ e $\boldsymbol{C}$.

Solução: a) *i)* $\varphi = \frac{\rho\pi}{\varepsilon_0}\left(r^2 l - \frac{4}{3}r_1^3\right)$ a) *ii)* $\varphi = \frac{\rho\pi}{\varepsilon_0}r^2 l$

b) $\vec{E}_A = \frac{\rho}{\varepsilon_0}\left(\frac{r^2}{l} - \frac{4}{3}\frac{r_1^3}{l^2}\right)\hat{r}$; $\vec{E}_B = \left(-\frac{\rho\, r_1^3\sqrt{2}}{3\varepsilon_0 l^2} + \frac{\rho}{\varepsilon_0}\frac{r^2}{l}\right)\hat{r}_{cil} \pm \frac{\rho\, r_1^3\sqrt{2}}{3\varepsilon_0 l^2}\hat{z}$

$\vec{E}_C = \frac{\rho}{\varepsilon_0}\left(\frac{r^2}{l} - \frac{r_1^3 l}{6\,(l^2/4+36r^2)^{3/2}}\right)\hat{r}_{cil} \pm \frac{\rho}{\varepsilon_0}\frac{2r_1^3 r}{(l^2/4+36r^2)^{3/2}}\,\hat{z}$

Relações campo-potencial e equações locais do campo

20. Uma esfera de raio $\boldsymbol{R}$ contém uma distribuição volúmica de cargas $\boldsymbol{\rho}$, de simetria esférica.

a) Determine a expressão da função $\boldsymbol{\rho(r)}$ sabendo que o campo elétrico dentro da esfera é radial com um módulo constante $\boldsymbol{E_0}$:
   i) aplicando a forma local do teorema de Gauss.
   j) aplicando a forma integral do teorema de Gauss.

b) Calcule a carga total $\boldsymbol{Q}$ contida na esfera e determine o campo elétrico ao exterior da esfera. Verifique a continuidade do campo na fronteira interior/exterior da esfera.

Solução: $\rho(r) = \frac{2\varepsilon_o}{r}\ E_0$; $Q = 4\pi\varepsilon_o E_0 R^2$; $E(r) = \frac{E_0 R^2}{r^2}$

21. O chamado "potencial de Yukawa" é uma maneira de representar as forças nucleares, cujo alcance é muito mais curto do que as forças coulombianas:

$V = \frac{q}{4\pi\varepsilon_o}\frac{exp(-r/a)}{r}$ onde $a > 0$ representa o alcance da interação.

Determine a distribuição volúmica de carga $\boldsymbol{\rho}$ que cria este potencial.

Solução: $\rho = -\frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{exp(-r/a)}{ra^2}$

22. O espaço entre dois cilindros coaxiais infinitos, de raios $\boldsymbol{R_1} < \boldsymbol{R_2}$, está carregado com uma densidade volúmica de carga $\boldsymbol{\rho = a/r}$.

a) Determine o campo elétrico em qualquer ponto do espaço.

b) Deduza as expressões do potencial elétrico, sob a hipótese que $V(R_1) = 0$.

Solução:

a) $E_I = 0$; $E_2 = \frac{a}{\varepsilon_o}\ \frac{r-R_1}{r}$; $E_3 = \frac{a}{\varepsilon_o}\ \frac{R_2-R_1}{r}$

b) $V_I = 0$; $V_2 = \frac{a}{\varepsilon_o}\left(R_1 Ln\frac{r}{R_1} - r + R_1\right)$; $V_3 = \frac{a}{\varepsilon_o}\{(R_1 - R_2)(1 + Lnr) - R_1 LnR_1 + R_2 LnR_2\}$

23. Um longo cilindro de raio $\boldsymbol{a}$ tem uma carga uniforme por unidade de comprimento $\boldsymbol{Q}$ C/m. Encontre a d.d.p. entre dois pontos situados à distância $\boldsymbol{r_1}$ e $\boldsymbol{r_2}$ do eixo do cilindro ($\boldsymbol{a} < \boldsymbol{r_1} < \boldsymbol{r_2}$).

Solução: $V_1 - V_{2_1} = \frac{Q}{2\pi\varepsilon_o} Ln\frac{r_2}{r_1}$

24. Ao longo de um plano o potencial é dado por: $V = \frac{a\ \cos\theta}{r^2} + \frac{b}{r}$ em que $\boldsymbol{r}$ e $\boldsymbol{\theta}$ são as coordenadas polares de um ponto do plano e $\boldsymbol{a}$ e $\boldsymbol{b}$ são duas constantes.

Encontre as componentes $\boldsymbol{E_r}$ e $\boldsymbol{E_\theta}$ do campo elétrico, em qualquer ponto.

Solução: $E_r = -\frac{2a\cos\theta}{r^3} - \frac{b}{r^2}$; $E_\theta = -\frac{asen\theta}{r^3} + \frac{b}{r^2}$

25. Dada a função vectorial de componentes:

$$A_x = 6xy \qquad A_y = 3x^2 - 3y^2 \qquad A_z = 0$$

Calcule o integral de linha de $\vec{A}$, do ponto (0,0,0) para o ponto (2,4,0), através do caminho mais curto. Repita o cálculo para um caminho parabólico. Tire conclusões.

Solução: –16

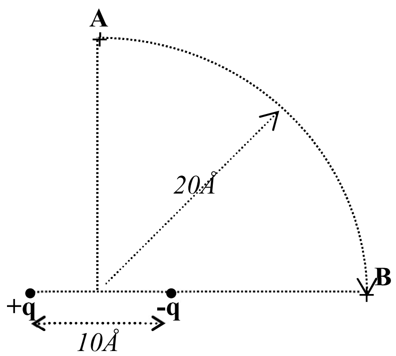
Trabalho das forças elétricas. Energia eletrostática

26. Um electrão está colocado num ponto $\boldsymbol{A}$, no campo dum dipolo de cargas $+\boldsymbol{q}$ e $-\boldsymbol{q}$ distanciadas de $\boldsymbol{a = 10}$ **Å**.

a) Qual será o trabalho realizado se o electrão fizer uma volta circular de raio $\boldsymbol{d = 20}$ **Å**, partindo do ponto $\boldsymbol{A}$ e voltando ao mesmo ponto. Considerando as linhas de campo dum dipolo, indique onde o trabalho é positivo ou negativo.

b) Determine o trabalho realizado no caminho circular de $\boldsymbol{A}$ para $\boldsymbol{B}$.

Solução: a) $W_{A\to A} = 0$ b) $W_{A\to B} = -e \cdot \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\ \frac{a}{d^2-(a^2/4)}$



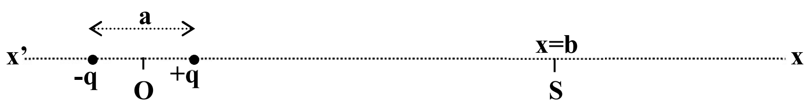
27. Calcule a energia eletrostática $\boldsymbol{W}$ duma esfera de raio R e de densidade de carga $\boldsymbol{\rho}$ uniforme, colocada no vácuo, pelos dois métodos seguintes

a) A partir da densidade de energia.

b) Usando a lei $W = \frac{1}{2}\int \rho V dv$ ou calculando o trabalho necessário para carregar a esfera, $W = \int_0^Q V dq$.

Solução: $W = \frac{4}{15}\,\frac{\pi\rho^2 R^5}{\varepsilon_0}$

28. Um dipolo (carga $\boldsymbol{q}$ e separação $\boldsymbol{a}$) está colocado ao longo do eixo-$\boldsymbol{xx}$.



a) Calcule o trabalho necessário para trazer uma carga $+\boldsymbol{Q}$ desde o infinito até ao ponto $\boldsymbol{S}$, em $x = b$.

b) Escreva uma aproximação para o potencial em $\boldsymbol{S}$, na condição $b \gg a$.

c) Use o resultado da alínea anterior para obter a amplitude e direção do campo elétrico no ponto $\boldsymbol{S}$.

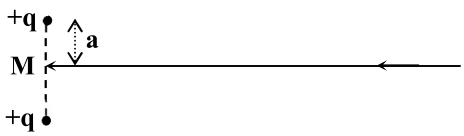
Solução: $W = \frac{Q\,q\,a}{4\pi\varepsilon_0(b^2 - a^2/4)}$; $V_S = \frac{q\,a}{4\pi\varepsilon_0 b^2}$; $\vec{E} = \frac{2\,q\,a}{4\pi\varepsilon_0 b^3}\,\hat{x}$

29. Duas cargas pontuais idênticas de valor $+\boldsymbol{q}$ estão separadas de uma distância $\boldsymbol{2a}$ como mostra a figura.

Calcule o trabalho por unidade de carga para trazer uma carga desde o infinito ao longo de uma linha representada na figura e até ao ponto $\boldsymbol{M}$:

a) calculando o integral de linha

b) usando o conceito de potencial

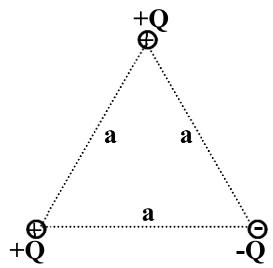


Solução: $W = \frac{q}{2\pi\varepsilon_0 a}$

30. Calcule a energia potencial do sistema de cargas ilustrado na figura.

(*Nota: a energia potencial de um sistema de cargas pontuais é igual ao trabalho necessário para trazer as cargas para as suas posições finais, desde muito longe (do infinito).*

Solução: $E_p = -\frac{Q^2}{4\pi\varepsilon_0 a}$



Condutores

31. Uma esfera metálica tem o raio $\boldsymbol{R}$ e está isolada de todos os outros corpos.

a) Expresse o potencial da superfície da esfera como função da carga nela colocada.

b) Integre a expressão da alínea anterior para determinar o trabalho necessário para carregar a esfera a um potencial V.

Solução: $V = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 R}$; $W = \frac{Q^2}{8\pi\varepsilon_0 R}$