Álgebra Linear e Geometria Analítica

Matrizes e Sistemas de Equações Lineares

Departamento de Matemática Universidade de Aveiro

Vetores em $\mathbb{R}^n$

Os vetores em $\mathbb{R}^n$ são usualmente representados por

$$X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \quad \text{ou} \quad X = (x_1, \ldots, x_n).$$

Os números reais $x_1, x_2, \ldots, x_n$ designam-se por componentes do vetor X.

Por exemplo, $\begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 35 \end{bmatrix}$ e $(-2, 1, 0, 35)$ representam o mesmo vetor de $\mathbb{R}^4$.

Vetores em $\mathbb{R}^n$

Operações em $\mathbb{R}^n$ (definidas de forma análoga às operações em $\mathbb{R}^2$ e $\mathbb{R}^3$):

- Adição: $\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 + y_1 \\ x_2 + y_2 \\ \vdots \\ x_n + y_n \end{bmatrix}$
- Multiplicação por um escalar: $\alpha \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha x_1 \\ \alpha x_2 \\ \vdots \\ \alpha x_n \end{bmatrix}$

Estas operações podem ser combinadas no que designamos por combinação linear de vetores.
O vetor $u \in \mathbb{R}^n$ é uma combinação linear dos vetores $v_1, \ldots, v_k \in \mathbb{R}^n$ se

$$u = \alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_k v_k, \quad \alpha_1, \ldots, \alpha_k \in \mathbb{R}.$$

Matrizes em $\mathbb{R}^{m\times n}$

Os vetores em $\mathbb{R}^n$ generalizam-se a vetores em $\mathbb{R}^{m\times n}$ que designamos por **MATRIZES**.

Sendo a_{ij} números reais (para todos os indices $i \in \{1, \dots, m\}$ e $j \in \{1, \dots, n\}$) considere

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1j} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & \dots & a_{ij} & \dots & a_{in} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mj} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

dizemos que A é uma matriz com m linhas e n colunas. Em alternativa, também dizemos que

- A é uma matriz $m \times n$,
- A é uma matriz de ordem $m \times n$,
- A é uma matriz de dimensão $m \times n$.

Matriz $m \times n$

$$A = \begin{array}{c@{}l} \begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1j} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & \dots & a_{ij} & \dots & a_{in} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mj} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix} & \begin{matrix} \\ \\ \leftarrow \text{linha } i \\ \\ \\ \end{matrix} \\ \begin{matrix} \uparrow \\ \text{coluna } j \end{matrix} & \end{array}$$

a_{ij} é o elemento ou entrada (i, j) da matriz A

Notação abreviada:

$A = [a_{ij}]_{m \times n}$ ou $A = [a_{ij}],\ i = 1, \dots, m,\ j = 1, \dots, n$

Igualdade

A igualdade de matrizes define-se de modo análogo à igualdade de vetores.

Sejam $A = [a_{ij}]$ e $B = [b_{ij}]$, matrizes de dimensão $m \times n$.

A e B dizem-se iguais, escrevendo-se $A = B$, se todos os elementos de A forem iguais aos correspondentes elementos de B, ou seja, se

$$a_{ij} = b_{ij}, \qquad i = 1, \ldots, m, \; j = 1, \ldots, n.$$

Matriz quadrada, matriz linha e matriz coluna

Seja $A = [a_{ij}]$ uma matriz de ordem $m \times n$.

- A diz-se uma matriz quadrada de ordem n se tem n linhas e n colunas. Os elementos a_{ii}, $i = 1, \cdots, n$, formam a diagonal principal (ou diagonal) da matriz A.

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1i} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & \cdots & a_{ii} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{ni} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}.$$

- A diz-se uma matriz linha se $m = 1$, ou seja, $A = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \end{bmatrix}$.

- A diz-se uma matriz coluna se $n = 1$, ou seja, $A = \begin{bmatrix} a_{11} \\ \vdots \\ a_{i1} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{bmatrix}$.

Matriz triangular e matriz diagonal

Uma matriz quadrada $A = [a_{ij}]$ diz-se

- triangular superior se $a_{ij} = 0$, para $i > j$:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1i} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & a_{ii} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix};$$

- triangular inferior se $a_{ij} = 0$, para $i < j$; por exemplo, $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 4 & 3 \end{bmatrix}$;
- triangular se é triangular inferior ou triangular superior;
- diagonal; se $a_{ij} = 0, \quad i \neq j$, ou seja, se A é uma matriz triangular inferior e triangular superior; por exemplo, $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{bmatrix}$.

Matriz identidade e matriz nula

Uma matriz $A = [a_{ij}]$ designa-se por

- matriz identidade de ordem n, e denota-se por I (ou I_n), se A é uma matriz diagonal de ordem n com as entradas da diagonal iguais a 1, ou seja,

$$a_{11} = \cdots = a_{nn} = 1.$$

- matriz nula $m \times n$, e denota-se por O (ou $O_{m\times n}$), se A é uma matriz $m \times n$ com as entradas iguais a 0:

$$a_{ij} = 0, \;\; 1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n.$$

Matriz identidade de ordem 3 e matriz nula 2×3:

$$I_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad O_{2\times 3} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Transposta de uma matriz. Matriz simétrica.

- A transposta da matriz $m \times n$ $A = [a_{ij}]$ é a matriz $n \times m$

$$A^T = [a_{ji}]$$

obtida por troca da posição relativa das linhas pelas colunas da matriz A. Por exemplo,

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad A^T = \begin{bmatrix} 1 & 5 \\ 2 & 6 \\ 3 & 7 \\ 4 & 8 \end{bmatrix}$$

Propriedade: $(A^T)^T = A.$

- Uma matriz A de ordem n diz-se simétrica se $A = A^T$, ou seja, se

$$a_{ij} = a_{ji}, \text{ para } 1 \leq i, j \leq n.$$

Por exemplo,

$$C = \begin{bmatrix} -2 & -1 & 3 \\ -1 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & -5 \end{bmatrix} = C^T.$$

Nota:
- Todas as matrizes simétricas são matrizes quadradas.
- Todas as matrizes diagonais são matrizes simétricas.

Adição e multiplicação por escalar

Sejam $A = [a_{ij}]$, $B = [b_{ij}]$ matrizes $m \times n$ e $\alpha \in \mathbb{R}$.

A soma de A e B é a matriz $m \times n$ $A + B = C = [c_{ij}]$ tal que

$$c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}, \qquad i = 1, \ldots, m, \ j = 1, \ldots, n.$$

O produto de A pelo escalar α é a matriz $m \times n$ $\alpha A = D = [d_{ij}]$ tal que

$$d_{ij} = \alpha\, a_{ij}, \qquad i = 1, \ldots, m, \ j = 1, \ldots, n.$$

A matriz $m \times n$ A é uma combinação linear das matrizes $A_1, \ldots, A_k$ $m \times n$ se

$$A = \alpha_1 A_1 + \cdots + \alpha_k A_k, \quad \alpha_1, \ldots, \alpha_k \in \mathbb{R}$$

Exemplo 1

Consideremos uma fábrica onde são produzidos os produtos A e B a partir de três recursos, R_1, R_2 e R_3. Para produzir 1 unidade do produto:

- *A são necessárias 2 unidades de R_1, 1 unidade de R_2 e 0 unidades de R_3; informação que vamos guardar no vetor* $u = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$;
- *B são necessárias 1 unidade de R_1, 3 unidades de R_2 e 2 unidades de R_3; dados que vamos guardar no vetor* $v = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix}$.

- O vetor que resulta da multiplicação escalar $3u = 3\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix}$ dá-nos as quantidades de cada recurso necessárias para produzir 3 unidades do produto A;
- o vetor que resulta da combinação linear

$$2u + 4v = 2\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + 4\begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 4 \\ 12 \\ 8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 \\ 14 \\ 8 \end{bmatrix}$$

indica as quantidades de cada recurso que são necessárias para produzir 2 unidades do produto A e 4 unidades do produto B.

Propriedades da adição e da multiplicação por escalar

Propriedades da adição de matrizes

- comutativa: $A + B = B + A$,
- associativa: $(A + B) + C = A + (B + C)$,
- admite elemento neutro: $A + O = O + A = A$,
- A possui simétrico aditivo: $A + (-A) = (-A) + A = O$,
- $(A + B)^T = A^T + B^T$,

para quaisquer matrizes $m \times n$ A, B, C.

Propriedades da multiplicação por escalar de matrizes

- associativa: $\alpha\,(\beta\,A) = (\alpha\,\beta)\,A$,
- distributiva: $(\alpha + \beta)\,A = \alpha\,A + \beta\,A$,
- distributiva: $\alpha(A + B) = \alpha\,A + \alpha\,B$,
- $(\alpha A)^T = \alpha\,A^T$,

para quaisquer matrizes $m \times n$ A, B, e $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

Multiplicação de matrizes

Caso: multiplicação de uma matriz linha A, $1 \times n$, por uma matriz coluna B, $n \times 1$, sendo

$$A = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_n \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad B = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}.$$

O produto de A por B é obtido por

$$A\,B = a_1 b_1 + a_2 b_2 + \cdots + a_n b_n = \sum_{i=1}^{n} a_i b_i.$$

Observação: esta operação está bem definida se A e B possuem igual número de elementos!

Exemplo: $\begin{bmatrix} -2 & 1 & 4 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ 5 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} = (-2) \times 3 + 1 \times 5 + 4 \times (-1) + 2 \times 1 = -3.$

Multiplicação de matrizes

Caso geral: multiplicação de uma matriz A, $m \times n$, por uma matriz B, $n \times p$, sendo

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1j} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & \dots & a_{ij} & \dots & a_{in} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mj} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad B = \begin{bmatrix} b_{11} & \dots & b_{1j} & \dots & b_{1p} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ b_{i1} & \dots & b_{ij} & \dots & b_{ip} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ b_{n1} & \dots & b_{nj} & \dots & b_{np} \end{bmatrix}$$

.

O produto de A por B é a matriz $C = AB$, de dimensão $m \times p$, com $C = [c_{ij}]$, cuja entrada c_{ij} resulta da multiplicação da linha i de A pela coluna j de B:

$$c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + \cdots + a_{in}b_{nj}, \qquad i = 1, \dots, m, \; j = 1, \dots, p.$$

Exemplos

Consideremos, novamente, o Exemplo 1 (slide 13).

Seja A a matriz que tem nas suas colunas os vetores u e v, $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$, e seja $w = \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \end{bmatrix}$.

A combinação linear $2u + 4v$ coincide com a multiplicação da matriz A pelo vetor w:

$$Aw = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \times 2 + 1 \times 4 \\ 1 \times 2 + 3 \times 4 \\ 0 \times 2 + 2 \times 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 \\ 14 \\ 8 \end{bmatrix}.$$

Outro exemplo: multiplicação de uma matriz 3×2 por uma matriz 2×2

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 4 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \times 2 + 1 \times 4 & 2 \times 5 + 1 \times (-1) \\ 1 \times 2 + 3 \times 4 & 1 \times 5 + 3 \times (-1) \\ 0 \times 2 + 2 \times 4 & 0 \times 5 + 2 \times (-1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 & 9 \\ 14 & 2 \\ 8 & -2 \end{bmatrix}.$$

Propriedades da multiplicação de matrizes

- associativa: $(AB)C = A(BC)$,
- distributiva à esquerda e à direita, em relação à adição:

$$(A+\widetilde{A})B = AB + \widetilde{A}B \quad \text{e} \quad A(B+\widetilde{B}) = AB + A\widetilde{B},$$

- admite elemento neutro à esquerda e à direita: $I_m A = A = A I_n$,
- $(\alpha A)B = \alpha\,(AB) = A(\alpha B)$,
- $(AB)^T = B^T A^T$,

para quaisquer matrizes $A, \widetilde{A}$ $m \times n$, $B, \widetilde{B}$ $n \times p$, C $p \times q$ e $\alpha \in \mathbb{R}$.

Nota importante: A multiplicação de matrizes não é comutativa!

Observação: Se A é uma matriz de ordem n e $p \in \mathbb{N}$,

$$A^p = A\,A^{p-1} = A^{p-1}A.$$

Por convenção, $A^0 = I_n$.

Sistema de m equações lineares com n incógnitas

$$\left\{\begin{array}{rcl} a_{11}\,x_1 + \cdots + a_{1n}\,x_n & = & b_1 \\ & \vdots & \\ a_{m1}\,x_1 + \cdots + a_{mn}\,x_n & = & b_m \end{array}\right.$$

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \qquad X = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}$$

matriz dos coeficientes

coluna das incógnitas

coluna dos termos independentes

Forma matricial de um sistema linear

$$\left\{\begin{array}{rcl} a_{11}\,x_1 + \cdots + a_{1n}\,x_n & = & b_1 \\ \vdots & & \\ a_{m1}\,x_1 + \cdots + a_{mn}\,x_n & = & b_m \end{array}\right. \quad \Leftrightarrow \quad AX = B,$$

em que A é a matriz $(m \times n)$ dos coeficientes do sistema,
X é a coluna $(n \times 1)$ das incógnitas,
B é a coluna $(m \times 1)$ dos termos independentes e

$$M = [\,A\,|\,B\,] = \left[\begin{array}{ccc|c} a_{11} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{array}\right]$$

é uma matriz $m \times (n+1)$ designada por matriz ampliada, matriz aumentada ou matriz completa do sistema.

Matriz escalonada

A primeira entrada não nula de cada linha é designada por pivô.

$$\begin{bmatrix} 0 & \dots & a_1 & * & \dots & * & * & * & \dots & * \\ 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & a_2 & * & * & \dots & * \\ 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & a_3 & \dots & * \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}, \quad a_1, a_2, a_3, \dots \neq 0$$

- Abaixo de cada pivô só ocorrem zeros,
- Dadas duas linhas não nulas consecutivas, o pivô da linha $i+1$ está numa coluna à direita da coluna que contém o pivô da linha i,
- As linhas nulas, caso existam, ocorrem só na parte inferior da matriz.

Exemplos: $A = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 3 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

Matriz escalonada reduzida

$$\begin{bmatrix} 0 & \dots & 1 & * & \dots & 0 & * & 0 & \dots & * \\ 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 1 & * & 0 & \dots & * \\ 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 1 & \dots & * \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}$$

- A matriz está na forma escalonada,
- Os pivôs são todos iguais a 1,
- Acima de cada pivô só ocorrem zeros.

Exemplo: $B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

Sistemas com matrizes $[A|B]$ escalonadas

$[A|B]$ matriz escalonada $\longrightarrow$ resolução do sistema $AX = B$ por substituição ascendente das incógnitas.

VANTAGEM:
menos substituições de incógnitas e menos operações aritméticas, comparando com a aplicação do método de substituição a sistemas com matrizes $[A|B]$ não escalonadas.

Exemplo:

$$\begin{cases} x \; +y \; -2z = 4 \\ \quad 2y \; +3z = 6 \\ \qquad\quad -z = 2 \end{cases} \longrightarrow [A|B] = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -2 & 4 \\ 0 & 2 & 3 & 6 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \end{array}\right]$$ é uma matriz escalonada

$$\begin{cases} x \; +y \; -2z = 4 \\ \quad 2y \; +3z = 6 \\ \qquad\quad -z = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 4 - y + 2z \\ y = \frac{1}{2}(6 - 3z) \\ z = -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -6 \\ y = 6 \\ z = -2 \end{cases}$$

Conjunto de soluções: $\{(-6, 6, -2)\}$.

Sistemas de equações lineares equivalentes

Dois sistemas de equações lineares dizem-se equivalentes se têm o mesmo conjunto de soluções.

Questão:

Dado um sistema $AX = B$ é possível transformá-lo num sistema equivalente $CX = D$, com uma matriz ampliada $[C|D]$ escalonada?

Operações elementares

Operações elementares nas linhas de uma matriz

1. Troca da posição relativa de duas linhas, L_i e L_j: $L_i \leftrightarrow L_j$
2. Multiplicação de uma linha, L_i, por um escalar $\alpha \neq 0$: $L_i := \alpha L_i$
3. Substituição de uma linha, L_i, pela que dela se obtém adicionando-lhe outra linha, L_j, multiplicada por um escalar $\beta \in \mathbb{R}$: $L_i := L_i + \beta L_j$

Matrizes equivalentes por linhas

Duas matrizes A e C são equivalentes por linhas e escreve-se

$$A \sim C$$

se C resulta de A por aplicação de uma sequência finita de operações elementares nas linhas de A.

Obtenção de uma matriz escalonada - Exemplo 2

Teorema

Toda a matriz $m \times n$ é equivalente por linhas a uma matriz escalonada (reduzida) com a mesma dimensão.

Exemplo 2:

Obter uma matriz escalonada e uma matriz escalonada reduzida equivalentes por linhas à matriz

$$M = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 3 & -4 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 2 & -5 & 2 & 4 \\ 2 & 0 & -6 & 9 & 7 \end{bmatrix}$$

Passo 1: Encontrar na 1.ª coluna não nula de M, o 1º elemento não nulo (pivô).

Obtenção de uma matriz escalonada

Passo 2: Trocar linhas para colocar o pivô como 1.º elemento da coluna.

$$\begin{bmatrix} 0 & 2 & 3 & -4 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 2 & -5 & 2 & 4 \\ 2 & 0 & -6 & 9 & 7 \end{bmatrix} \underset{L_1 \leftrightarrow L_3}{\sim} \begin{bmatrix} 2 & 2 & -5 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 2 & 3 & -4 & 1 \\ 2 & 0 & -6 & 9 & 7 \end{bmatrix}$$

Passo 3: Operar com as linhas para obter zeros abaixo do pivô.

$$\begin{bmatrix} 2 & 2 & -5 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 2 & 3 & -4 & 1 \\ 2 & 0 & -6 & 9 & 7 \end{bmatrix} \underset{L_4 := L_4 - L_1}{\sim} \begin{bmatrix} 2 & 2 & -5 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 2 & 3 & -4 & 1 \\ 0 & -2 & -1 & 7 & 3 \end{bmatrix}$$

Obtenção de uma matriz escalonada

Passo 4: Considerar a submatriz que se obtém eliminando a 1.ª linha e aplicar os passos 1 a 4 a esta submatriz. Repetir este procedimento até esgotar as linhas.

$$\begin{bmatrix} 2 & 2 & -5 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 2 & 3 & -4 & 1 \\ 0 & -2 & -1 & 7 & 3 \end{bmatrix}$$

$$\vdots$$

Fim do Passo 4: Obtém-se uma matriz escalonada equivalente por linhas a M.

$$N = \begin{bmatrix} 2 & 2 & -5 & 2 & 4 \\ 0 & 2 & 3 & -4 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Obtenção de uma matriz escalonada reduzida

Continuando a aplicar operações elementares nas linhas obtém-se uma matriz escalonada reduzida.

Passo 5: Multiplicar as linhas não nulas pelos inversos dos pivôs de modo a obter pivôs iguais a 1.

$$\begin{bmatrix} 2 & 2 & -5 & 2 & 4 \\ 0 & 2 & 3 & -4 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \underset{\substack{L_1 := \frac{1}{2}L_1 \\ L_2 := \frac{1}{2}L_2 \\ L_3 := \frac{1}{2}L_3}}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & 1 & -\frac{5}{2} & 1 & 2 \\ 0 & 1 & \frac{3}{2} & -2 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{3}{2} & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Obtenção de uma matriz escalonada reduzida

Passo 6: Operar com as linhas de modo a obter zeros acima dos pivôs.

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & -\frac{5}{2} & 1 & 2 \\ 0 & 1 & \frac{3}{2} & -2 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{3}{2} & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & \frac{19}{4} & 7 \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{17}{4} & -\frac{5}{2} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{3}{2} & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \sim$$

$$L_2 := L_2 - \tfrac{3}{2}L_3 \qquad\qquad L_1 := L_1 - L_2$$

$$L_1 := L_1 + \tfrac{5}{2}L_3$$

$$\sim \quad R = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 9 & \frac{19}{2} \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{17}{4} & -\frac{5}{2} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{3}{2} & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Obtém-se uma matriz escalonada reduzida equivalente por linhas a M.

Observação: As matrizes obtidas nos vários passos são matrizes equivalentes por linhas, em particular,

$$M \sim N \sim R.$$

Aplicação à resolução de sistemas

Teorema

Sejam $AX = B$ e $CX = D$ sistemas com matrizes ampliadas $[\,A\,|\,B\,]$ e $[\,C\,|\,D\,]$, respectivamente. Se

$$[\,A\,|\,B\,] \sim [\,C\,|\,D\,],$$

então os dois sistemas são equivalentes, ou seja, têm o mesmo conjunto de soluções.

Observação:

Se $B = D = 0$, basta que $A \sim C$ para que os sistemas possuam o mesmo conjunto de soluções.

Note-se que uma coluna de zeros não é alterada por aplicação de operações elementares.

Método de eliminação de Gauss

1. Dado o sistema $AX = B$, formar a sua matriz ampliada $[\,A\,|\,B\,]$.
2. Transformar $[\,A\,|\,B\,]$ numa forma escalonada $[\,C\,|\,D\,]$.
3. Escrever o sistema $CX = D$, ignorando as linhas nulas, e resolver por substituição ascendente.

Método de eliminação de Gauss-Jordan

Consiste na aplicação do método de eliminação de Gauss obtendo, no passo 2., uma matriz ampliada $[\,C\,|\,D\,]$ numa forma escalonada reduzida.

Exemplo 3

Resolução de um sistema com o método de eliminação de Gauss:

$$\left\{\begin{array}{rrrrl} & 2y & +3z & -4w & =1\\ & & 2z & +3w & =4\\ 2x & +2y & -5z & +2w & =4\\ 2x & & -6z & +9w & =7\end{array}\right. \longrightarrow [A|B]=\left[\begin{array}{rrrr|r} 0 & 2 & 3 & -4 & 1\\ 0 & 0 & 2 & 3 & 4\\ 2 & 2 & -5 & 2 & 4\\ 2 & 0 & -6 & 9 & 7\end{array}\right]$$

$[A|B]$ é a matriz M do Exemplo 2 (rever slides 26-30) que foi transformada na matriz escalonada

$$N=[C|D]=\left[\begin{array}{rrrr|r} 2 & 2 & -5 & 2 & 4\\ 0 & 2 & 3 & -4 & 1\\ 0 & 0 & 2 & 3 & 4\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0\end{array}\right], \text{ com } N=[C|D] \sim M=[A|B].$$

$$\left\{\begin{array}{rrrrl} 2x & +2y & -5z & +2w & =4\\ & 2y & +3z & -4w & =1\\ & & 2z & +3w & =4\\ & & & 0 & =0\end{array}\right. \Leftrightarrow \cdots \text{(subs. ascendente)} \ldots \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{ll} x & =\frac{19}{2}-9w\\ y & =-\frac{5}{2}+\frac{17}{4}w\\ z & =2-\frac{3}{2}w\\ & w\in\mathbb{R}\end{array}\right.$$

Conjunto de soluções: $\left\{\left(\frac{19}{2}-9w,\ -\frac{5}{2}+\frac{17}{4}w,\ 2-\frac{3}{2}w,\ w\right)\ :\ w\in\mathbb{R}\right\}$

Exemplo 3 (cont.)

Resolução do sistema com o método de eliminação de Gauss-Jordan:

O sistema anterior pode ser resolvido, de modo análogo, com o método de eliminação de Gauss-Jordan. Neste caso, recorremos à <u>matriz escalonada reduzida</u> R que foi obtida no Exemplo 2:

$$R = \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 9 & \frac{19}{2} \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{17}{4} & -\frac{5}{2} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{3}{2} & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right],$$

com $\quad R = [E|F] \sim M = [A|B]$.

Para obter o conjunto de soluções do sistema $AX = B$ resolvemos o sistema $EX = F$ por substituição ascendente.

Classificação de sistemas

Um sistema linear representado matricialmente por $AX = B$, tal que

$$[\,A \mid B\,] \sim [\,C \mid D\,],$$

com a matriz $[\,C \mid D\,]$ escalonada, classifica-se em

- impossível se não possui solução

  (a coluna D tem um pivô);

- possível e determinado se possui uma única solução

  (a coluna D não tem um pivô e todas as colunas de C têm pivô);

- possível e indeterminado se possui uma infinidade de soluções

  (a coluna D não tem um pivô e existem colunas de C que não têm pivô).

  O grau de indeterminação do sistema é o n.º de incógnitas livres, ou seja, o n.º de colunas de C sem pivô.

O sistema do Exemplo 3 (slide 33) é possível e indeterminado com grau de indeterminação **1**, porque a coluna D não tem pivô e a matriz C tem uma coluna (4.ª coluna) sem pivô.

Característica e classificação de sistemas

A característica da matriz A, $\text{car}(A)$, é o número de pivôs de uma matriz escalonada C equivalente por linhas a A.

O sistema linear $AX = B$ com A $m \times n$ e B $m \times 1$ é

1. impossível $\Leftrightarrow$ $\text{car}(A) < \text{car}([A|B])$;
2. possível e determinado $\Leftrightarrow$ $\text{car}(A) = \text{car}([A|B]) = n$;
3. possível e indeterminado com grau de indet. $n - \text{car}(A)$ $\Leftrightarrow$ $\text{car}(A) = \text{car}([A|B]) < n$.

No sistema do Exemplo 3 (slide 33), o n.º de colunas de A (ou n.º de incógnitas) é $n = 4$ e as matrizes C e $[C|D]$ têm ambas 3 pivôs. Então

$$\text{car}(A) = \text{car}([A|B] = 3 < n = 4,$$

confirmando-se que o sistema é possível e indeterminado com grau de indeterminação $n - \text{car}(A) = 1$.

Sistema homogéneo e nulidade

Um sistema diz-se homogéneo se os termos independentes são todos nulos:

$$AX = 0.$$

Todo o sistema homogéneo é possível pois possui pelo menos a solução nula, dita solução trivial. Mas se o sistema for indeterminado tem outras soluções, ditas não triviais.

A nulidade de uma matriz A $m \times n$, é denotada por $\text{nul}(A)$, e é o número de incógnitas livres do sistema $AX = 0$, ou seja, é o grau de indeterminação deste sistema, isto é,

$$\text{nul}(A) = n - \text{car}(A).$$

Aplicação: posição relativa de uma reta e de um plano

Seja $[A|B]$ a matriz ampliada 3×4 do sistema constituído pelas equações cartesianas da reta $\mathcal{R}$ e pela equação geral do plano $\mathcal{P}$ de $\mathbb{R}^3$. Existem três situações possíveis para a interseção de $\mathcal{R}$ e $\mathcal{P}$.

- A reta $\mathcal{R}$ e o plano $\mathcal{P}$ são concorrentes, isto é, intersetam-se num único ponto. Este caso ocorre quando o sistema $[A|B]$ é possível e determinado, isto é,

$$\text{car}\left([A|B]\right) = \text{car}(A) = 3.$$

- A reta $\mathcal{R}$ e o plano $\mathcal{P}$ são estritamente paralelos, isto é a sua interseção é o conjunto vazio. Este caso ocorre quando o sistema $[A|B]$ é impossível, ou seja,

$$\text{car}\left([A|B]\right) > \text{car}(A) = 2.$$

- O plano plano $\mathcal{P}$ contém a reta reta $\mathcal{R}$ ($\mathcal{R} \subset \mathcal{P}$). Este caso ocorre quando o sistema $[A|B]$ é possível e indeterminado, ou seja,

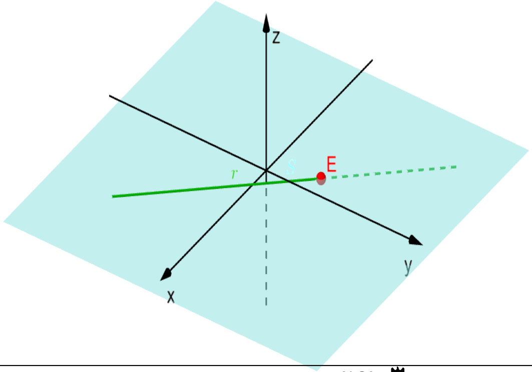
$$\text{car}\left([A|B]\right) = \text{car}(A) = 2.$$

Exemplo

Consideremos a reta r com equações cartesianas $x + y - 2z = 4$ e $2y + 3z = 6$ e o plano S: $-z = 2$. Verifica-se que

$$\left\{ \begin{array}{rrrl} x & +y & -2z & = 4 \\ & 2y & +3z & = 6 \\ & & -z & = 2 \end{array} \right. \longrightarrow [A|B] = \left[\begin{array}{rrr|r} 1 & 1 & -2 & 4 \\ 0 & 2 & 3 & 6 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \end{array} \right].$$

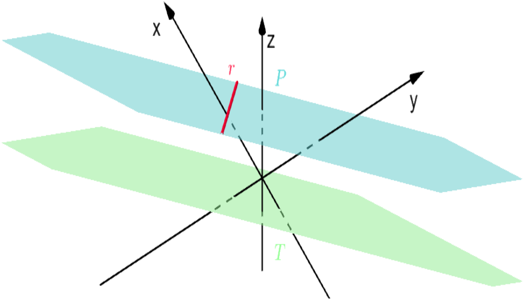
$\mathrm{car}(A) = \mathrm{car}([A|B]) = 3 \quad \longrightarrow \quad$ a reta r e plano S são concorrentes



Exemplo

Planos: $P : x + y + z = 3, \quad T : 2x + 2y + 2z = -3,$

Reta: $r : \; 3x + 2z = 9 \;$ e $\; 3y + z = 0.$



$$P \cap r : \quad [A|B] = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 3 & 0 & 2 & 9 \\ 0 & 3 & 1 & 0 \end{array}\right] \underset{L_2 := L_2 - 3L_1}{\sim} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & -3 & -1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & 0 \end{array}\right] \underset{L_3 := L_3 + L_2}{\sim} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & -3 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

$\text{car}(A) = \text{car}([A|B]) = 2 \longrightarrow$ o plano P contém a reta r

Exercício: recorrendo à característica, verifique que r e T são estritamente paralelos.

Aplicação: posição relativa de duas retas

Seja $[A|B]$ a matriz ampliada 4×4 do sistema constituído pelas equações cartesianas das retas $\mathcal{R}$ e $\mathcal{R}'$ de $\mathbb{R}^3$.

- As retas $\mathcal{R}$ e $\mathcal{R}'$ são concorrentes, isto é, intersectam-se num único ponto. Este caso ocorre quando o sistema $[A|B]$ é possível e determinado, ou seja, quando

$$\text{car}\,([A|B]) = \text{car}(A) = 3.$$

- As retas $\mathcal{R}$ e $\mathcal{R}'$ são coincidentes. Este caso ocorre quando o sistema $[A|B]$ é possível e indeterminado, ou seja, quando

$$\text{car}\,([A|B]) = \text{car}(A) = 2.$$

- As retas $\mathcal{R}$ e $\mathcal{R}'$ não têm pontos em comum ($\mathcal{R} \cap \mathcal{R}' = \emptyset$). Este caso ocorre quando o sistema $[A|B]$ é impossível. Existem duas situações possíveis:
  - As retas $\mathcal{R}$ e $\mathcal{R}'$ são estritamente paralelas e, portanto, são complanares. Este caso ocorre quando

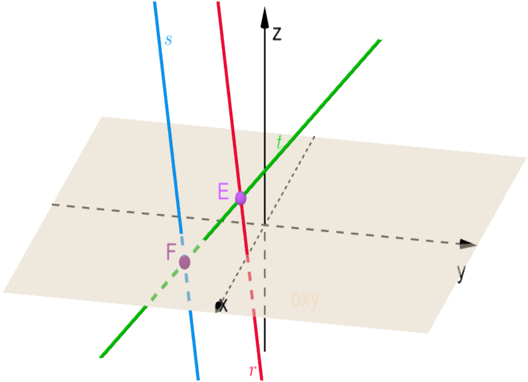
$$\text{car}\,([A|B]) = 3 > \text{car}(A) = 2.$$

  - As retas $\mathcal{R}$ e $\mathcal{R}'$ são enviesadas, ou seja, são <u>não</u> complanares. Este caso ocorre quando

$$\text{car}\,([A|B]) = 4 > \text{car}(A) = 3.$$

Exemplo

Retas: r: x-2y=3 e x+y+z=3, s: 2x-y+z=6 e x+y+z=-3; t: x=2 e y-z=-2.



Posição relativa de t e r?

$$[A|B] = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & -2 \\ 1 & -2 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & 3 \end{array}\right] \underset{\substack{L_3 := L_3 - L_1 \\ L_4 := L_4 - L_1}}{\sim} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & -2 \\ 0 & -2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right] \underset{\substack{L_3 := L_3 + 2L_2 \\ L_4 := L_4 - L_2}}{\sim} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & -2 & -3 \\ 0 & 0 & 2 & 3 \end{array}\right] \underset{L_4 := L_4 + L_3}{\sim} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & -2 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

$\text{car}(A) = \text{car}([A|B]) = 3 \quad \longrightarrow$ as retas t e r são concorrentes

Exercício: recorrendo à característica, verifique que as retas r e s são estritamente paralelas.

Aplicação: posição relativa de dois planos

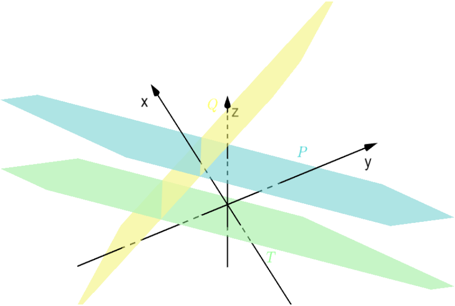
Seja $[A|B]$ a matriz ampliada 2×4 do sistema constituído pelas equações gerais dos planos $\mathcal{P}$ e $\mathcal{P}'$ de $\mathbb{R}^3$.

- os planos $\mathcal{P}$ e $\mathcal{P}'$ são estritamente paralelos $(\mathcal{P} \cap \mathcal{P}' = \emptyset)$ se o sistema $[A|B]$ é impossível, ou seja, se
$$\operatorname{car}([A|B]) > \operatorname{car}(A) = 1.$$

- Se os planos planos $\mathcal{P}$ e $\mathcal{P}'$ têm pontos em comum, o sistema $[A|B]$ é possível e indeterminado. Existem duas situações possíveis:
  - Os planos planos $\mathcal{P}$ e $\mathcal{P}'$ são coincidentes. Este caso ocorre quando
  $$\operatorname{car}([A|B]) = \operatorname{car}(A) = 1.$$
  - Os planos planos $\mathcal{P}$ e $\mathcal{P}'$ são concorrentes e a sua interseção é uma reta. Este caso ocorre quando
  $$\operatorname{car}([A|B]) = \operatorname{car}(A) = 2.$$

Exemplo

Planos: $P : x + y + z = 3$, $Q : 2x - y + z = 6$, $T : 2x + 2y + 2z = -3$



$$P \cap T : \quad [A|B] = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 2 & 2 & 2 & -3 \end{array}\right] \underset{L_2 := L_2 - 2L_1}{\sim} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & -6 \end{array}\right].$$

$\text{car}(A) = 1 < \text{car}([A|B]) = 2 \longrightarrow$ os planos P e T são estritamente paralelos

$$P \cap Q : \quad [A|B] = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 2 & -1 & 1 & 6 \end{array}\right] \underset{L_2 := L_2 - 2L_1}{\sim} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & -3 & -1 & 0 \end{array}\right].$$

$\text{car}(A) = \text{car}([A|B]) = 2 \longrightarrow$ os planos P e Q são concorrentes

Inversa de uma matriz quadrada

Uma matriz A $n \times n$ diz-se invertível se existe B $n \times n$ tal que

$$A\,B = B\,A = I_n. \tag{1}$$

Teorema

Se A $n \times n$ é invertível, então existe uma única matriz B $n \times n$ que verifica a igualdade $A\,B = B\,A = I_n$.

- A matriz B que satisfaz as relações anteriores designa-se por inversa de A e denota-se por A^{-1}.
- Se não existe uma matriz B que satisfaça as igualdades (1), diz-se que A é uma matriz singular ou não invertível.

Teorema

Se A e B são matrizes $n \times n$ tais que $B\,A = I_n$, então $A\,B = I_n$.

Propriedades da inversa

Propriedades

Para quaisquer A, B $n \times n$ invertíveis e $c \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$

1. $(A^{-1})^{-1} = A$;
2. $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$;
3. $(cA)^{-1} = c^{-1}A^{-1}$;
4. $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$.

Método de cálculo da inversa

Método prático para determinar a inversa:

$$[A \,|\, I_n] \;\underset{\substack{\uparrow\\ \text{método de eliminação de Gauss-Jordan}}}{\sim}\; [I_n \,|\, A^{-1}]$$

Critérios de invertibilidade de uma matriz

Teorema Dada A $n \times n$, são equivalentes as afirmações

1. A é invertível
2. A é equivalente à matriz identidade I_n, isto é, $A \sim I_n$
3. $\operatorname{car}(A) = n$
4. $\operatorname{nul}(A) = 0$
5. $AX = 0$ possui apenas a solução trivial.
6. Para cada B $n \times 1$, o sistema $AX = B$ tem uma única solução. Se A é invertível, a solução do sistema $AX = B$ é $X = A^{-1}B$.