Estuda a natureza das seguintes séries numéricas. Em caso de convergência indica se é simples ou absoluta.

(a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n+(-2)^n}{n2^n}$ *Sugestão: Para estudares a natureza da série dos módulos, se for útil podes tirar partido do facto de* $|n+(-1)^n 2^n|$ *ser igual a* $2^n+(-1)^n n$.

Aproveitando a sugestão, verifica-se que a série não converge absolutamente. De facto, o módulo do termo geral é

$$\left|\frac{n+(-2)^n}{n2^n}\right| = \frac{|n+(-2)^n|}{n2^n} = \frac{2^n+(-1)^n n}{n2^n} = \frac{2^n}{n2^n} + \frac{(-1)^n n}{n2^n} = \frac{1}{n} + \frac{(-1)^n}{2^n} = \frac{1}{n} + \left(-\frac{1}{2}\right)^n,$$

soma do termo geral da série harmónica (de ordem 1) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n}$, divergente, e da série geométrica de razão $-\frac{1}{2} \in]-1,1[$, convergente; portanto, a série dos módulos é divergente.

Por outro lado, mas de forma parecida, prova-se que a série converge, pois o termo geral é

$$\frac{n+(-2)^n}{n2^n} = \frac{n}{n2^n} + \frac{(-1)^n 2^n}{n2^n} = \frac{1}{2^n} + \frac{(-1)^n}{n},$$

soma dos termos gerais de séries convergentes: da série geométrica de razão $\frac{1}{2} \in]-1,1[$ e da série harmónica *alternada* $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n}$, convergente pelo critério de Leibniz (já que $\frac{1}{n}$, módulo do termo geral, tende monotonicamente para zero).

Concluindo, a série dada converge simplesmente.

Seguem algumas observações.

i. Tratando-se de uma série de termos quaisquer e sendo preciso especificar, em caso de convergência, se é simples ou absoluta, convém sempre: primeiro, verificar se o termo geral não tende para zero (ou seja, se a série diverge) e, depois, estudar a convergência absoluta, pois esta análise é necessária na maioria dos casos – e muitas vezes é suficiente, como na alinea (b). Se a série dos módulos não for convergente, estudar-se-á a natureza da série.

ii. A divergência da série dos módulos demonstra-se também por comparação com a série harmónica: se a_n é o módulo do termo geral da série e $b_n = \frac{1}{n}$, é suficiente mostrar que $\frac{a_n}{b_n} = 1 + \frac{(-1)^n n}{2^n}$ e que esta expressão tende para 1.

iii. É possível, mas não é fácil, aplicar o critério de Leibniz para provar a convergência da série: para além de ter uma expressão relativamente complicada, o módulo do termo geral é decrescente só a partir de $n = 7$.

iv. Prova (não pedida) do facto enunciado na sugestão: para n par, $|n+(-1)^n 2^n| = |n+2^n| = 2^n+n$; para n ímpar, $|n+(-1)^n 2^n| = |n-2^n| = 2^n - n$, porque $2^n > n$ para todo o $n \in \mathbb{N}$ (aliás, não é difícil verificar que $2^x > x, \forall x \in \mathbb{R}$).

(b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{(n+\ln n)^n}{2^n n^{n+1}}$

A série (alternada) converge absolutamente: aplicando o critério da raiz (de Cauchy), tem-se que

$$\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{\left|(-1)^n \frac{(n+\ln n)^n}{2^n n^{n+1}}\right|} = \lim_{n\to+\infty} \frac{\sqrt[n]{(n+\ln n)^n}}{\sqrt[n]{2^n n^n n}} = \lim_{n\to+\infty} \frac{n+\ln n}{2n\sqrt[n]{n}} = \lim_{n\to+\infty} \frac{1+\frac{\ln n}{n}}{2\sqrt[n]{n}} = \frac{1+0}{2\cdot 1} = \frac{1}{2} < 1.$$

Na resolução utilizaram-se os limites notáveis $\lim_{n\to+\infty} \frac{\ln n}{n} = 0$ e $\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{n} = 1$, que se podem justificar assim:

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{(\ln x)'}{(x)'} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x} = 0 \overset{\text{regra de}}{\underset{\text{Cauchy}}{\Rightarrow}} \lim_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x} = 0 \Rightarrow \lim_{n\to+\infty} \frac{\ln n}{n} = 0 \quad \text{e} \quad \lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{n} = \lim_{n\to+\infty} n^{\frac{1}{n}} = \lim_{n\to+\infty} e^{\frac{1}{n}\ln n} = e^0 = 1.$$