4. Integrais Impróprios

Cálculo I — agrupamento 4 19/20

baseado no texto de Virgínia Santos, Cálculo com funções de uma variável, 2009/10, pp. 299 — 369

Isabel Brás

UA

15/11/2019

Conteúdos

Tipos de Integrais Impróprios

A definição de integral de Riemann exige que a função integranda, f, esteja definida num intervalo fechado e limitado, I, e que f seja limitada. Pode estender-se esta definição omitindo uma (ou as duas) dessas condições, passando ao estudo do que chamamos Integrais Impróprios.

Integrais Impróprios

- 1.ª Espécie (I é ilimitado)
- 2.ª Espécie (f é ilimitada ou não definida em alguns pontos de I)
- 3.ª Espécie (I é ilimitado e f é ilimitada ou não definida em alguns pontos de I)

Exemplos

1.ª Espécie:

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2}dx \qquad \int_{-\infty}^{0} x^3 dx \qquad \int_{-\infty}^{+\infty} e^x dx$$

2.ª Espécie:

$$\int_0^1 \frac{1}{x^2}dx \qquad \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\operatorname{sen} x - 1}dx \qquad \int_2^5 \frac{1}{(x-2)(x-5)}dx \qquad \int_{-2}^1 \frac{1}{x^2}dx$$

3.ª Espécie:

$$\int_0^{+\infty} \frac{1}{x^2}dx \qquad \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{(x-2)(x-5)}dx \qquad \int_{-\infty}^{1} \ln(1-x)dx$$

Integral impróprio de 1.ª espécie no limite superior de integração:

Definição:

Seja $f : [a, +\infty[\to \mathbb{R}$ uma função integrável em $[a, t]$, para todo o $t \geq a$. Se existe e é finito o limite

$$\lim_{t \to +\infty} \int_a^t f(x)\, dx$$

então o integral impróprio $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(x)\, dx$ diz-se convergente e escreve-se

$$\int_a^{+\infty} f(x)\, dx = \lim_{t \to +\infty} \int_a^t f(x)\, dx.$$

Caso contrário, o integral em causa diz-se divergente.

Exemplo:

Como

$$\begin{aligned}\lim_{t\to+\infty}\int_0^t \frac{1}{1+x^2}\,dx &= \lim_{t\to+\infty}\left[\operatorname{arctg}(x)\right]_0^t \\ &= \lim_{t\to+\infty}\operatorname{arctg} t \\ &= \frac{\pi}{2}.\end{aligned}$$

o integral impróprio $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{1}{1+x^2}\,dx$ é convergente e

$$\int_0^{+\infty}\frac{1}{1+x^2}\,dx = \frac{\pi}{2}\,.$$

Exercício:

Prove que o integral impróprio $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^\alpha}\,dx$, onde $\alpha \in \mathbb{R}$, é:

divergente, se $\alpha \leq 1$;

convergente, se $\alpha > 1$ e, neste caso, $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^\alpha}\,dx = \frac{1}{\alpha - 1}$.

Exercício:

Prove que o integral impróprio $\displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{\beta x}\,dx$, onde $\beta \in \mathbb{R}$, é:

divergente, se $\beta \geq 0$;

convergente, se $\beta < 0$ e, neste caso, $\displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{\beta x}\,dx = -\frac{1}{\beta}$.

Integral impróprio de 1ª espécie no limite inferior de integração:

Definição:

Seja $f :]-\infty, a] \to \mathbb{R}$ uma função integrável em $[t, a]$, para todo o $t \leq a$.
Se existe e é finito o limite

$$\lim_{t \to -\infty} \int_t^a f(x)\, dx$$

então o integral impróprio $\int_{-\infty}^a f(x)\, dx$ diz-se convergente e escreve-se

$$\int_{-\infty}^a f(x)\, dx = \lim_{t \to -\infty} \int_t^a f(x)\, dx.$$

Caso contrário, o integral em causa diz-se divergente.

Exemplo:

Como

$$\begin{aligned} \lim_{t\to-\infty}\int_t^1 \frac{1}{1+x^2}\,dx &= \lim_{t\to-\infty}\left[\operatorname{arctg}(x)\right]_t^1 \\ &= \lim_{t\to-\infty}\left(\frac{\pi}{4} - \operatorname{arctg} t\right) \\ &= \frac{3\pi}{4}, \end{aligned}$$

o integral impróprio $\displaystyle\int_{-\infty}^1 \frac{1}{1+x^2}\,dx$ é convergente e $\displaystyle\int_{-\infty}^1 \frac{1}{1+x^2}\,dx = \frac{3\pi}{4}$.

Exercício:

Estude a natureza do seguinte integral impróprio em função do parâmetro $a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\}$

$$\int_{-\infty}^0 a^x\,dx\,.$$

Proposição:

Sejam $f : [a, +\infty[\to \mathbb{R}$ e $g : [a, +\infty[\to \mathbb{R}$ funções integráveis em $[a, t]$, para todo o $t \geq a$. Então verificam-se as seguintes condições:

1. Se $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ e $\displaystyle\int_a^{+\infty} g(x)\,dx$ são convergentes, então $\displaystyle\int_a^{+\infty} (\alpha f(x) + \beta g(x))\,dx$ é convergente, para todos os $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, e
$$\int_a^{+\infty} (\alpha f(x) + \beta g(x))\,dx = \alpha \int_a^{+\infty} f(x)\,dx + \beta \int_a^{+\infty} g(x)\,dx.$$
2. Se $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ é divergente, então $\displaystyle\int_a^{+\infty} (\alpha f(x))\,dx$ é divergente, para todo o $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

Exercício: Mostre que, nas condições da Proposição do slide anterior, se $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ é convergente e $\int_a^{+\infty} g(x)\,dx$ é divergente, então $\int_a^{+\infty} (f(x)+g(x))\,dx$ é divergente.

Proposição:

Sejam $f : [a,+\infty[\to \mathbb{R}$ uma função integrável em $[a,t]$, para todo o $t \geq a$, e $b > a$. Então os integrais impróprios

$$\int_a^{+\infty} f(x)\,dx \quad \text{e} \quad \int_b^{+\infty} f(x)\,dx$$

têm a mesma natureza (*i.e.*, ou são ambos convergentes ou ambos divergentes). Em caso de convergência, tem-se que

$$\int_a^{+\infty} f(x)\,dx = \int_a^{b} f(x)\,dx + \int_b^{+\infty} f(x)\,dx.$$

Exemplos:

1. $$\int_{\frac{1}{2}}^{+\infty} \frac{1}{x^3}\, dx = \int_{\frac{1}{2}}^{1} \frac{1}{x^3}\, dx + \int_{1}^{+\infty} \frac{1}{x^3}\, dx = \frac{3}{2} + \frac{1}{2} = 2.$$

2. Como, atendendo ao exercício do Slide 7, o integral impróprio $\displaystyle\int_1^{+\infty} x^2\, dx$ é divergente, então o integral impróprio $\displaystyle\int_3^{+\infty} x^2\, dx$ também é divergente.

Observação:

Resultados análogos aos dos slides 10 e 11, com as devidas adaptações, são válidos para integrais impróprios de 1.ª espécie no limite inferior de integração.

Integral impróprio de 1ª espécie em ambos os limites de integração:

Definição:

Seja $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função integrável em $[\alpha, \beta]$ para todos os $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ tais que $\alpha < \beta$. Se, para algum $a \in \mathbb{R}$, os integrais impróprios $\displaystyle\int_{-\infty}^{a} f(x)\,dx$ e $\displaystyle\int_{a}^{+\infty} f(x)\,dx$ são ambos convergentes dizemos que o integral impróprio $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx$ é convergente e escrevemos

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = \int_{-\infty}^{a} f(x)\,dx + \int_{a}^{+\infty} f(x)\,dx\,.$$

Se, para algum $a \in \mathbb{R}$, um dos integrais impróprios

$$\int_{-\infty}^{a} f(x)\,dx \quad \text{ou} \quad \int_{a}^{+\infty} f(x)\,dx$$

é divergente dizemos que o integral impróprio $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx$ é divergente.

Exemplo:

O integral impróprio $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1+x^2}\,dx$ é convergente uma vez que $\displaystyle\int_{-\infty}^{0} \frac{1}{1+x^2}\,dx$ e $\displaystyle\int_{0}^{+\infty} \frac{1}{1+x^2}\,dx$ são convergentes (verifique!).

Mostre ainda que

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1+x^2}\,dx = \pi\,.$$

Critérios de Convergência

Proposição: (Critério de Comparação)

Sejam f e g duas funções definidas em $[a, +\infty[$, integráveis em $[a, t]$, para todo o $t \geq a$, tais que

$$0 \leq f(x) \leq g(x) \ ,$$

para todo o $x \in [a, +\infty[$. Então:

(i) se $\displaystyle\int_a^{+\infty} g(x)\, dx$ é convergente, então $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(x)\, dx$ é convergente;

(ii) se $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(x)\, dx$ é divergente, então $\displaystyle\int_a^{+\infty} g(x)\, dx$ é divergente.

Exemplo de aplicação do Critério de Comparação ao estudo da natureza do seguinte integral:

$$\int_1^{+\infty} \operatorname{sen} \frac{1}{x^2}\, dx \,.$$

Notar que, para todo o $x \in [1, +\infty[$ temos

$$0 \leq \operatorname{sen} \frac{1}{x^2} \leq \frac{1}{x^2} \,. \text{ (justifique!)} \tag{1}$$

Uma vez que o integral impróprio $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2}\, dx$ é convergente e que a desigualdade (1) se verifica, pelo Critério de Comparação, o integral impróprio

$$\int_1^{+\infty} \operatorname{sen} \frac{1}{x^2}\, dx$$

é convergente.

Proposição: (Critério de Comparação por Passagem ao Limite ou, simplesmente, Critério do Limite)

Sejam f e g duas funções definidas em $[a, +\infty[$ e integráveis em $[a, t]$, para todo o $t \geq a$, tais que $f(x) \geq 0$ e $g(x) > 0$, para todo o $x \in [a, +\infty[$. Seja

$$L := \lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{g(x)} \ .$$

Então:

(i) Se $L \in \mathbb{R}^+$, então $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(x)\, dx$ e $\displaystyle\int_a^{+\infty} g(x)\, dx$ têm a mesma natureza.

(ii) Se $L = 0$ e $\displaystyle\int_a^{+\infty} g(x)\, dx$ é convergente, então $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(x)\, dx$ é convergente.

(iii) Se $L = +\infty$ e $\displaystyle\int_a^{+\infty} g(x)\, dx$ é divergente, então $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(x)\, dx$ é divergente.

Exemplo de aplicação do Critério do Limite ao estudo da natureza do seguinte integral:

$$\int_1^{+\infty} \operatorname{sen} \frac{1}{x^2}\, dx \,.$$

Notar que, para todo o $x \in [1, +\infty[$, $\operatorname{sen} \frac{1}{x^2} \geq 0$ e $\frac{1}{x^2} > 0$. Mais

$$L = \lim_{x \to +\infty} \frac{\operatorname{sen} \frac{1}{x^2}}{\frac{1}{x^2}} = 1 \,.$$

Uma vez que $L \in \mathbb{R}^+$ e que $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2}\, dx$ é convergente, pelo Critério do Limite, o integral impróprio

$$\int_1^{+\infty} \operatorname{sen} \frac{1}{x^2}\, dx$$

é convergente.

Observação:

Tanto o Critério de Comparação como o Critério do Limite têm as suas versões para integrais impróprios de 1.ª espécie, impróprios no limite de integração inferior, basta fazer pequenas adaptações nos enunciados apresentados nos slides anteriores (Escreva-os!).

Exemplo (Estudo da natureza do integral impróprio $\int_{-\infty}^{0} \frac{e^x}{(x-1)^2}\, dx$):

Para todo o $x \in]-\infty, 0]$, $\frac{e^x}{(x-1)^2} > 0$ e $\frac{1}{(x-1)^2} > 0$.
Uma vez que

$$L = \lim_{x \to -\infty} \frac{\frac{e^x}{(x-1)^2}}{\frac{1}{(x-1)^2}} = \lim_{x \to -\infty} e^x = 0$$

e que $\displaystyle\int_{-\infty}^{0} \frac{1}{(x-1)^2}\, dx$ é convergente (verifique!), concluímos, pelo Critério do Limite, que $\displaystyle\int_{-\infty}^{0} \frac{e^x}{(x-1)^2}\, dx$ é convergente.

Proposição:

Seja $f : [a, +\infty[\to \mathbb{R}$ integrável em $[a, t]$, para todo o $t \in [a, +\infty[$.
Se o integral impróprio

$$\int_a^{+\infty} |f(x)|\, dx$$

é convergente, então

$$\int_a^{+\infty} f(x)\, dx$$

também é convergente.

Observação:

A proposição recíproca não é verdadeira.

Definições: (Convergência absoluta / Convergência simples)

Seja $f : [a, +\infty[\to \mathbb{R}$ integrável em $[a, t]$, para todo o $t \in [a, +\infty[$.

1. Dizemos que o integral impróprio $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ é absolutamente convergente, se o integral impróprio $\displaystyle\int_a^{+\infty} |f(x)|\,dx$ é também convergente.

2. No caso em que $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ é convergente, mas $\displaystyle\int_a^{+\infty} |f(x)|\,dx$ é divergente, dizemos que $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ é simplesmente convergente.

Observação:

Com ligeiras adaptações, pode definir-se convergência absoluta e enunciar-se a mesma proposição para integrais impróprios de 1.ª espécie, impróprios no limite inferior de integração (Escreva esses enunciados!).

Integral impróprio de 2ª espécie no limite de integração inferior:

Definição:

Seja $f :]a, b] \to \mathbb{R}$ uma função integrável em $[t, b]$, para todo o $a < t \leq b$. Se existe e é finito

$$\lim_{t \to a^+} \int_t^b f(x)\, dx$$

dizemos que o integral impróprio $\int_a^b f(x)\, dx$ é convergente e escrevemos, por definição,

$$\int_a^b f(x)\, dx = \lim_{t \to a^+} \int_t^b f(x)\, dx \; .$$

Caso contrário, dizemos que o integral impróprio é divergente.

Exercício:

Prove que o integral impróprio $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{x^\alpha}\,dx$, onde $\alpha \in \mathbb{R}^+$, é:

- divergente, se $\alpha \geq 1$;
- convergente, se $\alpha < 1$ e, neste caso, $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{x^\alpha}\,dx = \frac{1}{1-\alpha}$.

Integral impróprio de 2ª espécie no limite de integração superior:

Definição:

Seja $f : [a, b[\to \mathbb{R}$ uma função integrável em $[a, t]$, para todo o $a \leq t < b$. Se existe e é finito

$$\lim_{t \to b^-} \int_a^t f(x)\, dx$$

dizemos que o integral impróprio $\int_a^b f(x)\, dx$ é convergente e escrevemos, por definição,

$$\int_a^b f(x)\, dx = \lim_{t \to b^-} \int_a^t f(x)\, dx \, .$$

Caso contrário, dizemos que o integral impróprio é divergente.

Integral impróprio de 2.ª espécie em ambos os limites de integração:

Definição:

Seja $f :]a, b[\to \mathbb{R}$ uma função integrável em $[t_1, t_2]$, para todos os t_1 e t_2 tais que $a < t_1 < t_2 < b$.

Dizemos que o integral impróprio $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx$ é convergente se, para algum $c \in]a, b[$, ambos os integrais $\displaystyle\int_a^c f(x)\,dx$ e $\displaystyle\int_c^b f(x)\,dx$ são convergentes. Neste caso, escrevemos

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx\,.$$

Caso contrário, dizemos que o integral impróprio é divergente.

Integral impróprio de 2.ª espécie num ponto interior do intervalo de integração:

Definição:

Seja f uma função definida em $[a, b]$ exceto possivelmente em $c \in]a, b[$, e integrável em $[a, t]$, para todo o $a \leq t < c$ e em $[r, b]$, para todo o $c < r \leq b$. Se os integrais impróprios

$$\int_a^c f(x)\, dx \quad \text{e} \quad \int_c^b f(x)\, dx \text{ forem ambos convergentes,}$$

então o integral impróprio $\int_a^b f(x)\, dx$ diz-se convergente e escreve-se

$$\int_a^b f(x)\, dx = \int_a^c f(x)\, dx + \int_c^b f(x)\, dx\,.$$

Caso contrário, dizemos que o integral impróprio $\int_a^b f(x)\, dx$ é divergente.

As propriedades, definições, e critérios de convergência apresentados para o integral de 1.ª espécie têm as suas versões para os integrais de 2.ª espécie (no limite inferior de integração ou no limite superior de integração). Nos slides seguintes apresentamos esses resultados apenas para o caso dos integrais de 2.ª espécie no limite inferior de integração, para os outros tipos de integrais de 2.ª espécie o estudo faz-se *mutatis mutandis*.

Proposição:

Sejam $f :]a, b] \to \mathbb{R}$ e $g :]a, b] \to \mathbb{R}$ funções integráveis em $[t, b]$, para todo o $t \in]a, b]$. Então verificam-se as seguintes condições:

1. Se $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx$ e $\displaystyle\int_a^b g(x)\,dx$ são convergentes, então $\displaystyle\int_a^b (\alpha f(x) + \beta g(x))\,dx$ é convergente, para todos os $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, e
$$\int_a^b (\alpha f(x) + \beta g(x))\,dx = \alpha \int_a^b f(x)\,dx + \beta \int_a^b g(x)\,dx\,.$$
2. Se $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx$ é divergente, então $\displaystyle\int_a^b (\alpha f(x))\,dx$ é divergente, para todo o $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

Proposição:

Sejam $f\colon]a,b] \to \mathbb{R}$ uma função integrável em $[t,b]$, para todo o $t \in]a,b]$, e $a < b' < b$. Então os integrais impróprios

$$\int_a^b f(x)\,dx \quad \text{e} \quad \int_a^{b'} f(x)\,dx$$

têm a mesma natureza (*i.e.*, ou são ambos convergentes ou ambos divergentes). Em caso de convergência, tem-se que

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^{b'} f(x)\,dx + \int_{b'}^b f(x)\,dx.$$

Critérios de Convergência

Proposição: (Critério de Comparação)

Sejam f e g duas funções definidas em $]a, b]$, integráveis em $[t, b]$, para todo o $t \in]a, b]$, tais que

$$0 \leq f(x) \leq g(x) \ ,$$

para todo o $x \in]a, b]$. Então:

(i) se $\displaystyle\int_a^b g(x)\,dx$ é convergente, então $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx$ é convergente;

(ii) se $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx$ é divergente, então $\displaystyle\int_a^b g(x)\,dx$ é divergente.

Proposição: (Critério de Comparação por Passagem ao Limite ou, simplesmente, Critério do Limite)

Sejam f e g duas funções definidas em $]a,b]$ e integráveis em $[t,b]$, para todo o $t \in]a,b]$, tais que $f(x) \geq 0$ e $g(x) > 0$, para todo o $x \in]a,b]$. Seja

$$L := \lim_{x \to a^+} \frac{f(x)}{g(x)} .$$

Então:

(i) Se $L \in \mathbb{R}^+$, então $\int_a^b f(x)\,dx$ e $\int_a^b g(x)\,dx$ têm a mesma natureza.

(ii) Se $L = 0$ e $\int_a^b g(x)\,dx$ é convergente, então $\int_a^b f(x)\,dx$ é convergente.

(iii) Se $L = +\infty$ e $\int_a^b g(x)\,dx$ é divergente, então $\int_a^b f(x)\,dx$ é divergente.

Definição: (Convergência absoluta / convergência simples)

Seja $f :]a, b] \to \mathbb{R}$ integrável em $[t, b]$, para todo o $t \in]a, b]$.

Dizemos que o integral impróprio $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx$ é absolutamente convergente, se o integral impróprio $\displaystyle\int_a^b |f(x)|\,dx$ é também convergente.

No caso de $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx$ ser convergente, mas $\displaystyle\int_a^b |f(x)|\,dx$ não o ser, dizemos que $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx$ é simplesmente convergente.

Proposição:

Seja $f :]a, b] \to \mathbb{R}$ integrável em $[t, b]$, para todo o $t \in]a, b]$.
Se o integral impróprio

$$\int_a^b f(x)\,dx$$

é absolutamente convergente, então também é convergente.

Integral impróprio de 3ª espécie do tipo $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$, onde f é ilimitada ou não está definida em $x = a$:

Definição:

Seja $f :]a, +\infty[\to \mathbb{R}$ integrável em $[t, t']$, quaisquer que sejam $t, t' \in \mathbb{R}$ tais que $a < t < t'$.

Dizemos que o integral impróprio $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ é convergente se, para algum $c \in]a, +\infty[$, os integrais impróprios $\int_a^c f(x)\,dx$ e $\int_c^{+\infty} f(x)\,dx$ forem ambos convergentes e escrevemos

$$\int_a^{+\infty} f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^{+\infty} f(x)\,dx$$

Caso contrário, dizemos que o integral impróprio é divergente.

Integral impróprio de 3ª espécie do tipo $\displaystyle\int_{-\infty}^{b} f(x)\,dx$, onde f é ilimitada ou não está definida em $x = b$:

Definição:

Seja $f :]-\infty, b[\to \mathbb{R}$ integrável em $[t, t']$, quaisquer que sejam $t, t' \in \mathbb{R}$ tais que $t < t' < b$.

Dizemos que o integral impróprio $\displaystyle\int_{-\infty}^{b} f(x)\,dx$ é convergente se, para algum $c \in]-\infty, b[$, os integrais impróprios $\int_{-\infty}^{c} f(x)\,dx$ e $\int_{c}^{b} f(x)\,dx$ forem ambos convergentes e escrevemos

$$\int_{\infty}^{b} f(x)\,dx = \int_{-\infty}^{c} f(x)\,dx + \int_{c}^{b} f(x)\,dx$$

Caso contrário, dizemos que o integral impróprio é divergente.

Observações:

- Definem-se de modo análogo os integrais impróprios de 3.ª espécie dos tipos $\displaystyle\int_{-\infty}^{a} f(x)\,dx$ e $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx$, onde f não está definida ou é ilimitada em algum ponto do interior do intervalo de integração.

- Atendendo ás definições apresentadas, para estudar a natureza de integrais impróprios de 3.ª espécie, devemos decompor o intervalo integração de modo conveniente e estudar a natureza de integrais impróprios de 1.ª e de 2.ª espécies (correspondentes).

Exemplo: Estudo da natureza do integral impróprio $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{x^3}\, dx$.

Considere os seguintes integrais (por exemplo):

$$\int_{-\infty}^{-1} \frac{1}{x^3}\, dx\,,\ \int_{-1}^{0} \frac{1}{x^3}\, dx\,,\ \int_{0}^{1} \frac{1}{x^3}\, dx \ \text{ e } \ \int_{1}^{+\infty} \frac{1}{x^3}\, dx\,.$$

Como o integral impróprio $\displaystyle\int_{0}^{1} \frac{1}{x^3}\, dx$ é divergente (Verifique usando a definição!), então $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{x^3}\, dx$ também é divergente.

Exercício: Verifique que o integral impróprio

$$\int_{0}^{+\infty} \frac{1}{x^\alpha}\, dx$$

é divergente, para todo o $\alpha \in \mathbb{R}$;