Disciplina: Cálculo II
Ano Letivo: 2022/2023
Turma: TP4-6
Professor: Nelson Faustino
Gabinete: 11.2.14
e-mail: nfaust@ua.pt

dmat
universidade
de aveiro

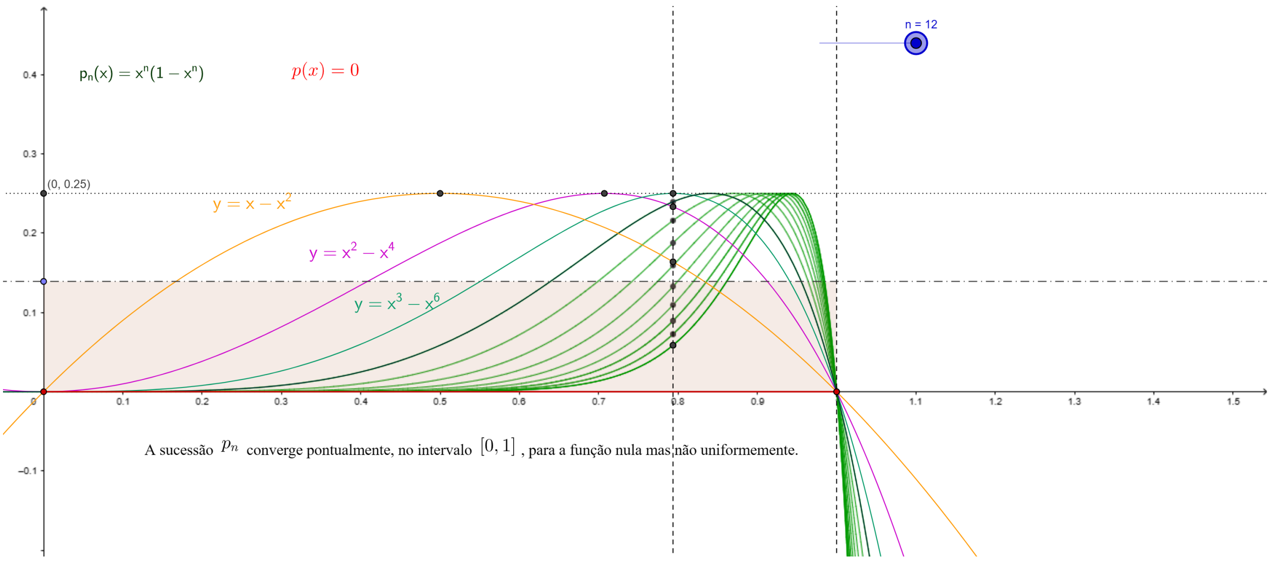
Caderno 2: Séries de Funções & Estudo de Séries de Potências

Versão de 28 de fevereiro de 2023

Observações

- Estas notas de aula correspondem a um guião que o professor irá seguir fielmente ao longo das aulas. Deve portanto trazê-las sempre consigo em formato papel e/ou digital.

- No final pode encontrar uma lista de exercícios elaborados pelo professor. Estes servirão de complemento aos exercícios propostos nas folhas práticas da disciplina.



"A matemática não é para ser fácil, não é para ser rápida. A paciência e a persistência são qualidades muito preciosas para a matemática. Na verdade, para a vida. Mas na matemática, se você não tiver paciência, persistência, você cai".
Investigadora Carolina Araújo, Instituto de Matemática Pura e Aplicada (IMPA) [1],[2]

---

[1]Citação retirada da página oficial do IMPA – https://impa.br/noticias/na-matematica-se-nao-houver-persistencia-voce-cai-diz-carolina-araujo/

[2]Imagem criada pela Professora Isabel Brás. Pode ser encontrada em https://www.geogebra.org/m/zbqgpaea

Folha Prática 2

Os exercícios selecionados da **Folha Prática 2** correspondem a um conjunto mínimo (altamente) recomendado para estudo autónomo.

Tema	**Exercícios**
Convergência Pontual/Uniforme	1.
Séries de Potências/Taylor	2.(a), 2.(b), 2.(d) 3.(b), 4., 5., 7.(a) 8., 9., 11.

Leituras Recomendadas

Para além do texto de apoio (Almeida , 2018) e dos **slides do capítulo 2**, disponíveis na plataforma Moodle (cf. Brás (2023)), espera-se que o aluno procure estudar por alguns dos livros que se encontram na bibliografia recomendada da disciplina. Na tabela abaixo foram catalogadas algumas sugestões de leitura.

Bibliografia	**Secção**
(Apostol , 1983)	11. Sucessões e Séries de Funções (pp. 491–497) [Leitura fortemente recomendável.] 11.8 Propriedades de Funções Representadas por Séries Reais de Potências (pp. 500–511) [Excluir, de momento, exemplos envolvendo resolução de equações diferenciais.]
(Stewart , 2013)	11.9 Representações de Funções como Séries de Potências (pp. 674–679) [Ler toda a secção. E procurar resolver exercícios no final.] 11.10 Séries de Taylor e Maclaurin (pp. 679–692) [Idem. Excluir exemplos em que aparece o produto de séries de potências.] 11.11 Aplicações dos Polinômios de Taylor (pp. 692–699) [Ibidem. Apenas atenção às notações (diferentes das adotadas em aula).]

Convergência Pontual vs. Convergência Uniforme

Definição 1 (Convergência Pontual e Uniforme). *Seja $(f_n)_n$ uma sucessão de funções, definida para todo o n por $f_n : D \to \mathbb{R}$. Dizemos que (f_n):*

(a) **Converge pontualmente**[a] *para uma função $f : D \to \mathbb{R}$ se, para todo o $x \in D$, se tem*

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x).$$

(b) **Converge uniformemente** *para uma função $f : D \to \mathbb{R}$ se, para todo o $x \in D$, se a sucessão numérica $(M_n)_n$ de termo geral*[b]

$$M_n := \sup_{x\in D} |f_n(x) - f(x)|$$

converge para zero (0), i.e. $\lim_{n\to\infty} M_n = 0$.

[a] Equivalentemente: f_n converge pontualmente para f se, e só se, $\lim_{n\to\infty} |f_n(x) - f(x)| = 0$, para todo o $x \in D$.

[b] Para todo o $x \in D$, o termo geral M_n corresponde ao **menor dos majorantes** de $|f_n(x) - f(x)|$.

Adenda 1 (Convergência Uniforme implica Convergência Pontual). *Da* **Definição 1** *e do* **Teorema do Enquadramento**[a] *pode-se concluir que toda a sucessão de funções uniformemente convergente também é pontualmente convergente, em virtude das desigualdade abaixo ser sempre satisfeita:*

$$0 \leq |f_n(x) - f(x)| \leq \sup_{x\in D} |f_n(x) - f(x)|, \quad \textit{para todo o} \quad x \in D$$

[a] Este teorema diz-nos, em particular, que se para duas sucessões numéricas, $(a_n)_n$ resp. $(b_n)_n$, se tem $0 \leq a_n \leq b_n$ e $\lim_{n\to\infty} b_n = 0$, então $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$.

Exemplo 1 (**Convergência Pontual**). *Considere as seguintes sucessões de funções definidas por:*

1. $\left(\dfrac{x}{n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$
2. $(x^n)_{n\in\mathbb{N}}$
3. $(x^n(1-x^n))_{n\in\mathbb{N}}$.

Em particular, verifica-se o seguinte para cada um dos casos:

1. *Para o caso de* $\left(\dfrac{x}{n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$, *tem-se que esta é a sucessão nula,* $(0)_{n\in\mathbb{N}}$, *quando* $x = 0$. *No caso de* $x \neq 0$, *segue que* $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{x}{n} = 0$. *Portanto, a sucessão de funções definida por* $\left(\dfrac{x}{n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ *converge pontualmente para a função nula* (0) *em* $\mathbb{R}$;

2. *Note que para valores de* $|x| \geq R$, *com* $R > 1$, *podemos concluir que* $(|x|^n)_{n\in\mathbb{N}}$ *converge para infinito, dado que* $\lim\limits_{n\to\infty} R^n = +\infty$.

   Por outro lado, para $x = 1$, *tem-se que esta é a sucessão constante* $(1)_{n\in\mathbb{N}}$, *e para* $x = -1$ *o limite da sucessão de termo geral* $(-1)^n$ *não existe. Portanto só faz sentido investigar a convergência pontual da sucessão de funções, definida por* $(x^n)_{n\in\mathbb{N}}$ *no intervalo* $]-1,1]$.

   Em concreto, para todo o $x \in]-1,1]$ *esta converge pontualmente para a função definida por*

$$\lim_{n\to\infty} x^n = \begin{cases} 0 & , -1 < x < 1 \\ 1 & , x = 1 \end{cases}.$$

3. *Usando o que foi dito anteriormente, podemos demonstrar, para todo o* $x \in]-1,1]$, *a igualdade de limites*[a] $\lim\limits_{n\to\infty} x^n = \lim\limits_{n\to\infty} x^{2n}$ *(função obtida anteriormente) e, por conseguinte, que a sucessão* $(x^n(1-x^n))_{n\in\mathbb{N}}$ *converge pontualmente para a sucessão nula,* $(0)_{n\in\mathbb{N}}$, *no intervalo* $]-1,1]$, *uma vez*[b] *que*

$$\lim_{n\to\infty} x^n(1-x^n) = \lim_{n\to\infty}(x^n - x^{2n}) = \lim_{n\to\infty} x^n - \lim_{n\to\infty} x^{2n} = 0.$$

[a] Para obtermos esta igualdade, envolvendo limites, usámos o facto de $(x^{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ ser uma subsucessão de $(x^n)_{n\in\mathbb{N}}$.

[b] Para o caso de $x \notin]-1,1]$, o limite $\lim\limits_{n\to\infty}(x^n - x^{2n})$ corresponde a uma indeterminação do tipo $\infty - \infty$.

Adenda 2 (**Interpretação Gráfica do Exemplo 1**). *Nos links abaixo – gentilmente partilhados pela Professora Isabel Brás – pode encontrar a representação gráfica para cada um dos casos abordados no* **Exemplo 1**:

1. *Sucessão de funções* $\left(\dfrac{x}{n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ *no intervalo* $[0,1]$ – https://www.geogebra.org/m/rkmhu7yp;
2. *Sucessão de funções* $(x^n)_{n\in\mathbb{N}}$ *no intervalo* $[0,1]$ – https://www.geogebra.org/m/trpqxstz;
3. *Sucessão de funções* $(x^n(1-x^n))_{n\in\mathbb{N}}$ *no intervalo* $[0,1]$ – https://www.geogebra.org/m/zbqgpaea

Exemplo 2 (**Convergência Uniforme**). *Investiguemos agora a convergência uniforme das sucessões de funções estudadas no* **Exemplo 1**. *A saber:*

1. $\left(\frac{x}{n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$
2. $(x^n)_{n\in\mathbb{N}}$
3. $(x^n(1-x^n))_{n\in\mathbb{N}}$.

Em particular, temos o seguinte:

1. *No intervalo* $[-1,1]$, *tem-se*[a] $\sup_{x\in[-1,1]}\left|\frac{x}{n}-0\right| = \max_{x\in[-1,1]}\frac{|x|}{n} = \frac{1}{n}$. *Para este caso, a convergência uniforme desta no intervalo* $[-1,1]$, *é uma consequência imediata do limite* $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0$.

2. *Para a função* $f:]-1,1]\to\mathbb{R}$, *definida por* $f(x)=\begin{cases}0 & ,-1<x<1\\ 1 & ,x=1\end{cases}$, *tem-se a igualdade*

$$\sup_{x\in]-1,1]}|x^n-f(x)|=1,$$

pelo que não se trata de uma função uniformemente convergente em $]-1,1]$.

3. *Para investigar neste caso a convergência uniforme, precisaria de investigar os máximos e mínimos da função* $f_n(x)=x^n(1-x^n)$. *A partir do seu estudo, iria concluir o seguinte:*

   i) $f_n'(x)=nx^{n-1}-2nx^{2n-1}$ $(=nx^{n-1}(1-2x^n))$ *anula-se quando* $x=0$ *ou*[b] $x^n=\frac{1}{2}$. *Logo estes são candidatos aos valores máximo da função.*

   ii) Do estudo anterior, segue que

$$\sup_{x\in]-1,1]}|x^n(1-x^n)| = \sup_{x^n=\frac{1}{2}}|x^n(1-x^n)| = \frac{1}{4}$$

pelo que também pode concluir que $(x^n(1-x^n))_{n\in\mathbb{N}}$ *também não define uma sucessão de funções uniformemente convergente.*

---

[a] Note que, para cada $n\in\mathbb{N}$, a função definida por $\frac{|x|^n}{n}$ é contínua no intervalo $[-1,1]$ – que é fechado e limitado. Logo o facto do supremo coincidir com o máximo é uma consequência direta do Teorema de Weierstraß para funções contínuas.

[b] $x=\frac{1}{\sqrt[n]{2}}$ é sempre solução da equação. Acresce que no caso em que n é um número par, esta equação tem duas soluções: $x=\pm\frac{1}{\sqrt[n]{2}}$.

Contra-Exemplo 1 (**Falha da Convergência Uniforme**). *A sucessão de funções, definida por* $\left(\frac{x}{n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$, *não converge para a função nula na reta real, uma vez que*

$$\sup_{x\in\mathbb{R}}\frac{|x|^n}{n}=+\infty$$

é uma consequência de $\mathbb{R}$ *ser um conjunto ilimitado.*

O mesmo tipo de raciocínio se aplicaria para justificar a igualdade $\sup_{x\in\mathbb{R}\setminus[-1,1]}\frac{|x|^n}{n}=+\infty$ *e, por conseguinte que esta sucessão* <u>*também não converge para a sucessão nula*</u>, $(0)_{n\in\mathbb{N}}$, *em* $\mathbb{R}\setminus[-1,1]$.

Teorema 1 (**Implicações da Convergência Uniforme**). *Seja* $(f_n)_n$ *uma sucessão de funções contínuas em* $[a,b]$. *Se* $(f_n)_n$ **converge uniformente** *para uma função* f *em* $[a,b]$, *então as seguintes propriedades são válidas:*

(a) f **é contínua em** $[a,b]$ *e, para todo o* $c \in [a,b]$, *vale a sequência de igualdades*

$$\lim_{x\to c} f(x) = f(c) = \lim_{n\to\infty} f_n(c).$$

(b) f **é integrável em** $[a,b]$ *e*

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n(x)dx.$$

(c) Adicionalmente, se a **sucessão das derivadas de** f_n**,** $(f'_n)_n$**,** *é também a uma* **sucessão de funções contínuas em** $[a,b]$ **que converge uniformemente em** $[a,b]$, *então:*

i) f *é diferenciável em* $[a,b]$*;*

ii) $f'(x) = \lim_{n\to\infty} f'_n(x)$, *para todo o* $x \in [a,b]$.

Adenda 3 (**Falha da Convergência Uniforme**). *Decorre naturalmente do* **Teorema 1** *o seguinte*

(a) $(f_n)_n$ *não converge uniformemente para uma* **função contínua** *em* $[a,b]$, *desde que pelo menos uma das condições abaixo se verifique:*

i) **Pelo menos um dos limites**, $\lim_{n\to\infty} f_n(x)$ *resp.* $\lim_{x\to c} f_n(x)$ **não existe ou é infinito***;*

ii) Os **limites iterados**, $\lim_{x\to c}\left(\lim_{n\to\infty} f_n(x)\right)$ *resp.* $\lim_{n\to\infty}\left(\lim_{x\to c} f_n(x)\right)$, *são* **diferentes**.

(b) $(f_n)_n$ *não converge uniformemente para uma* **função integrável** *em* $[a,b]$, *desde que pelo menos uma das condições abaixo se verifique:*

i) **Pelo menos um dos limites** $\lim_{n\to\infty} f_n(x)$ *resp.* $\lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n(x)dx$ **não existe ou é infinito***;*

ii) $\int_a^b \left(\lim_{n\to\infty} f_n(x)\right) dx$ **não existe ou é infinito***;*

iii) $\int_a^b \left(\lim_{n\to n} f_n(x)\right) dx \neq \lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n(x)dx$.

(c) $(f_n)_n$ *não converge uniformemente para uma* **função diferenciável** *em* $[a,b]$, *desde que pelo menos uma das condições abaixo se verifique:*

i) $f'_n(c)$ **não existe ou é infinito**, *para algum* $c \in [a,b]$*;*

ii) $\lim_{n\to\infty} f'_n(x)$ **não existe ou é infinito***;*

iii) $\left(\lim_{n\to\infty} f_n(x)\right)' \neq \lim_{n\to\infty} f'_n(x)$, *para algum* $x \in [a,b]$.

Exemplo 3 (**Provar que uma sucessão não converge, via cálculo de limites iterados**). *No* **Exemplo 1** *verificou que a sucessão de funções, definida por* (x^n), *converge pontualmente no intervalo* $]-1,1]$ *para a função*

$$f(x) = \begin{cases} 0 & , -1 < x < 1 \\ 1 & , x = 1 \end{cases}.$$

Em particular, $\lim_{x\to 1^-} f(x) = 0$ *mas* $\lim_{n\to\infty}(\lim_{x\to 1^-} x^n) = 1$, *provando assim – via aplicação direta do item (a) da* **Adenda 3** *que* $(x^n)_{n\in\mathbb{N}}$ *não converge uniformemente no intervalo* $]-1,1]$.

Contra-Exemplo 2 (Sucessão Derivada que não Converge Uniformemente). *Note que a sucessão de funções, definida em* $\mathbb{R}$ *por* $f_n(x) = \dfrac{\sin(nx)}{n}$, *converge uniformemente para a sucessão nula,* $(0)_{n\in\mathbb{N}}$. *De facto, a desigualdade* $|\sin(nx)| \leq 1$ *em* $\mathbb{R}$ *assim como a sucessão* $\left(\frac{1}{n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ *convergir para a sucessão nula,* $(0)_{n\in\mathbb{N}}$, *permite-nos concluir que*

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{x\in\mathbb{R}} \left| \frac{\sin(nx)}{n} - 0 \right| = \lim_{n\to\infty} \sup_{x\in\mathbb{R}} \frac{|\sin(nx)|}{n} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0.$$

Todavia a sucessão de funções $(f_n')_{n\in\mathbb{N}}$, *definida por* $f_n'(x) = \cos(nx)$ *não converge pontualmente (logo também não converge uniformemente), dado a sucessão*[a] $(cos(n\pi))_{n\in\mathbb{N}}$, *obtida a partir da substituição* $x = \pi$, *não admitir limite*[b].

[a] Ao mostrarmos que as subsucessões dos termos pares e ímpares de $(cos(n\pi))_{n\in\mathbb{N}}$, demonstramos também que $f_n'(x)$ não é contínua em $x = \pi$.

[b] Vide item (a) do Exercício 1.

Convergência Uniforme de Séries de Funções

Teorema 2 (Convergência Uniforme envolvendo Série de Funções). *Seja* $\sum_{n=0}^{\infty} f_n$ *uma série de funções contínuas em* $[a,b]$ *que* **converge uniformente** *para uma função*[a] $S := \lim_{n\to\infty} S_n$ *em* $[a,b]$, *então as seguintes propriedades são válidas:*

(a) $\sum_{n=0}^{\infty} f_n$ **é uma série de funções contínuas em** $[a,b]$ *e, para todo o* $c \in [a,b]$, *vale a sequência de igualdades*

$$\lim_{x\to c} \sum_{n=0}^{\infty} f_n(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\lim_{x\to c} f_n(x) \right).$$

(b) $\sum_{n=0}^{\infty} f_n$ **é uma série de funções integráveis em** $[a,b]$ *e*

$$\int_a^b \left(\sum_{n=0}^{\infty} f_n(x) \right) dx = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\int_a^b f_n(x)dx \right).$$

(c) Adicionalmente, se a **sucessão das derivadas de** f_n**,** $(f_n')_n$**,** *é também a uma* **sucessão de funções contínuas em** $[a,b]$ **e** $\sum_{n=0}^{\infty} f_n$ **converge uniformemente em** $[a,b]$, *então:*

i) $\sum_{n=0}^{\infty} f_n$ *é diferenciável em* $[a,b]$;

ii) $\left(\sum_{n=0}^{\infty} f_n(x) \right)' = \sum_{n=0}^{\infty} f_n'(x)$, *para todo o* $x \in [a,b]$.

[a] A função S é obtida a partir do limite da sucessão de somas parciais, $(S_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$, definida pontualmente, para cada $x \in [a,b]$, por $S_n(x) := \sum_{k=0}^{n} f_k(x)$.

Adenda 4 (Falha da Convergência Uniforme). *À semelhança do listado em* **Adenda 3**, *para sucessões de funções, podemos também obter as seguintes conclusões a partir do* **Teorema 2** *para* **séries de funções**. *A saber:*

(a) $\sum_{n=0}^{\infty} f_n$ *não converge uniformemente* *para uma* **função contínua** *em* $[a,b]$, *desde que pelo menos uma das condições abaixo se verifique:*

   i) $\sum_{n=0}^{\infty} f_n(x)$ **diverge** *para algum* $x \in [a,b]$;

   ii) $\lim_{x\to c} f_n(x)$ **não existe ou é infinito**;

   iii) $\lim_{x\to c} \sum_{n=0}^{\infty} f_n(x) \neq \sum_{n=0}^{\infty} \left(\lim_{x\to c} f_n(x) \right)$.

(b) $\sum_{n=0}^{\infty} f_n$ *não converge uniformemente* *para uma* **função integrável** *em* $[a,b]$, *desde que pelo menos uma das condições abaixo se verifique:*

   i) $\sum_{n=0}^{\infty} f_n(x)$ **diverge** *para algum* $x \in [a,b]$;

   ii) $\int_a^b f_n(x)dx$ **não existe ou é infinito**;

   iii) $\int_a^b \left(\sum_{n=0}^{\infty} f_n(x) \right) dx \neq \sum_{n=0}^{\infty} \left(\int_a^b f_n(x)dx \right)$.

(c) $\sum_{n=0}^{\infty} f_n$ *não converge uniformemente* *para uma* **função diferenciável** *em* $[a,b]$, *desde que pelo menos uma das condições abaixo se verifique:*

   i) $\sum_{n=0}^{\infty} f_n(x)$ **diverge** *para algum* $x \in [a,b]$;

   ii) $f_n'(c)$ **não existe ou é infinito**, *para algum* $c \in [a,b]$;

   iii) $\left(\sum_{n=0}^{\infty} f_n(x) \right)' = \sum_{n=0}^{\infty} f_n'(x)$, *para algum* $x \in [a,b]$.

Teorema 3 (Critério de Weierstraß). *Seja* $(f_n)_n$ *uma sucessão de funções,* $f_n : D \to \mathbb{R}$, *e* $\sum_{n=p}^{\infty} a_n$ $(p \in \mathbb{N}_0)$ *uma* **série numérica convergente** *de termos não negativos tal que*

$$|f_n(x)| \leq a_n, \quad \text{para todos os} \quad x \in D, \quad n \geq p \quad \text{inteiro}.$$

Então, para todo o $x \in D$, *a série* $\sum_{n=p}^{\infty} f_n(x)$ *é* **uniformemente convergente**[a].

[a] Equivalente a dizer que a série de funções, $\sum_{n=p} f_n$, é convergente em D.

Exemplo 4 (**Aplicação do Critério de Weierstraß**). *Note que a desigualdade*

$$|f_n(x)| \leq \frac{2}{n^3}, \quad \textit{para todos os} \quad x \in \mathbb{R},\ n \in \mathbb{N},$$

envolvendo a sucessão de funções, definida por $f_n(x) = \dfrac{1-\cos(nx)}{n^3}$, *é uma consequência da igualdade* $1 - \cos(nx) = 2\sin^2\left(\dfrac{nx}{2}\right)$ *e do contradomínio de* $\sin^2\left(\frac{nx}{2}\right)$ *ser o conjunto* $[0,1]$.

Segue então pelo **Teorema 3** *que a convergência uniforme da série de potências*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 - cos(nx)}{n^3}$$

é imediata pela convergência da série numérica $\displaystyle\sum_{n=1} \frac{2}{n^3}$.

Adicionalmente, o **Teorema 2** *garante-nos ainda o seguinte:*

(a) De $\cos(n\pi) = (-1)^n$, *para todo*[a] *o* $n \in \mathbb{N}$, *segue*[b] *que*

$$\lim_{x\to\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1-\cos(nx)}{n^3} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1-(-1)^n}{n^3} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{(2n-1)^3}.$$

(b) Decorre ainda da igualdade $\cos(n\pi) = (-1)^n$ *que* $\sin(-n\pi) = \sin(n\pi) = 0$ *(justifique)*[c]. *Segue então que*

$$\int_{-\pi}^{\pi} \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1-\cos(nx)}{n^3} \right) dx = \sum_{n=1}^{\infty} \int_{-\pi}^{\pi} \left(\frac{1-\cos(nx)}{n^3} dx \right) = \sum_{1}^{\infty} \frac{2\pi}{n^3}$$

(c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(nx)}{n^2} = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1-\cos(nx)}{n^3} \right)'$ *também é uma série uniformente convergente, facto esse que pode ser demonstrado pelo* **Teorema 3**.

---

[a] Vide item (a) do Exercício 1.

[b] Observe que $1-(-1)^n$ é igual a 0, quando n é par, e 2, quando n é ímpar. A partir deste argumento podemos reescrever a série de potências, via a substituição $n \to 2n-1$, eliminando assim os termos nulos.

[c] Sugestão: Use o *Teorema Fundamental a Trigonometria*.

Contra-Exemplo 3 (**Derivada de Série Uniformemente Convergente**). *Como teve possibilidade de averiguar no* **Exemplo 4**, *a série de funções*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(nx)}{n^2}$$

é uniformemente convergente em $\mathbb{R}$. *No entanto*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\sin(nx)}{n^2} \right)' = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(nx)}{n}$$

já não é uniformente convergente em $\mathbb{R}$, *dado esta ser divergente em pontos da forma* $x = 2k\pi$ $(k \in \mathbb{Z})$.

Interessante de se verificar, a escolha de pontos da forma $x = \pi + 2k\pi$ $(k \in \mathbb{Z})$ *conduzem-nos a série numérica que é simplesmente convergente (procure descobrir o porquê).*

Convergência Uniforme de Séries de Potências

Teorema 4 (Convergência Uniforme de Séries de Potências). *Seja* $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-c)^n$ *uma série de potências de raio*[a] $R \neq 0$*, e convergente em* $I \subset \mathbb{R}$*.*

Então a série de potências **converge uniformemente** *em qualquer subintervalo fechado e limitado* $[a,b]$ *de* I*.*

[a]A condição $R \neq 0$ exclui intervalos de convergência da forma $I = \{c\}$.

Teorema 5 (Teorema de Abel). *Seja* $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-c)^n$ *uma série de potências de raio*[a] $0 < R < \infty$*.*

Então as seguintes implicações são verdadeiras:

(a) Se a série de potências converge em $x = c + R$*, então esta também converge uniformemente em* $[c, c+R]$*.*

(b) Se a série de potências converge em $x = c - R$*, então esta também converge uniformemente em* $[c-R, c]$*.*

[a]A condição $0 < R < \infty$ exclui os intervalos de convergência $I = \{c\}$ e $I = \mathbb{R}$.

Teorema 6 (Convergência Uniforme envolvendo Série de Potências). *Seja* $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-c)^n$ *uma série de potências de raio* $R \neq 0$ *e* $I = \begin{cases} \mathbb{R} & , R = \infty \\ ]c-R, c+R[& , 0 < R < \infty. \end{cases}$

Se $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-c)^n$*, para todo o* $x \in I$*, então as seguintes implicações são verdadeiras:*

(a) f *é uma função contínua em* I*;*

(b) f *é uma função diferenciável em* I *e*

$$f'(x) = \sum_{n=0}^{\infty} n a_n (x-c)^{n-1}, \quad \text{para todo o} \quad x \in I.$$

(c) A função F*, definida por* $F(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1}(x-c)^{n+1}$*, é uma primitiva de* f *em* I *que satisfaz as seguintes propriedades*[a]*:*

i) $F(x) = \int_c^x f(t)dt$*;*

ii) $\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$*.*

[a]As propriedades i) e ii) são automáticas por aplicação do **Teorema Fundamental do Cálculo**.

Teorema 7 (Série de Potências vs. Série de Taylor). *Seja* $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-c)^n$ *o desenvolvimento em série de potências de uma função* f *num intervalo* $I \subset \mathbb{R}$*, com* $c \in I$*. Então* f *possui derivadas finitas de qualquer ordem no ponto* c *e*

$$a_n = \frac{f^{(n)}(c)}{n!}, \quad \text{para todo o} \quad n \in \mathbb{N}_0.$$

Adenda 5 (Série de Potências vs. Série de Taylor). *O* **Teorema 7** *permite-nos concluir que*

$$T_c^n(f(x)) = \sum_{k=0}^{n} a_k (x-c)^k$$

é o polinómio de Taylor de ordem n de f em torno de $c \in I$ e que as condições, envolvendo $R_c^n(f(x)) = f(x) - T_c^n(f(x))$, são <u>*sempre satisfeitas*</u>*:*

i) **Unicidade do Polinómio de Taylor:** $\lim_{x \to c} \frac{R_c^n(f(x))}{(x-c)^n} = 0$;

ii) **Convergência da Série de Taylor:** $\lim_{n \to \infty} R_c^n(f(x)) = 0$.

Em termos práticos, a aplicação do **Teorema 6** e do **Teorema 7** permite-nos obter desenvolvimentos em série a partir de desenvolvimentos já conhecidos, tais como os tabelados em (Stewart , 2013, p. 687).

Exemplo 5 (Funções Exponenciais vs. Hiperbólicas). *A partir da série de potências de*

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$$

é possível obter a série de potências de e^{-x}, uma vez que a transformação gráfica $x \mapsto -x$, por se tratar de uma composição de funções contínuas. Neste caso, tem-se

$$e^{-x} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-x)^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} x^n.$$

Adicionalmente, a série de potências da função hiperbólica $\sinh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$, pode ser obtida a partir da subtração, termo a termo, dos coeficientes das séries de potências de $\frac{e^x}{2}$ e $\frac{e^{-x}}{2}$.

Neste caso, tem-se

$$\begin{aligned} \frac{e^x - e^{-x}}{2} &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1-(-1)^n}{2n!} x^n \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} \quad \text{[após simplificações]}^a \end{aligned}$$

[a] Obtida com base nas igualdades $1-(-1)^n = 2$ ($n = 2k+1$- impar) e $1-(-1)^n = 0$ ($n = 2k$ - zero ou par).

Adenda 6 (Série de Potências de Funções Hiperbólicas). *No caso da função $\cosh(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$ – que corresponde a um dos Exercícios da* **Folha 2** *[que se encontra no Moodle], pode obter o seu desenvolvimento em série de potência por dois modos distintos:*

(a) Somando, termo a termo, os coeficientes das séries de potências de $\frac{e^x}{2}$ e $\frac{e^{-x}}{2}$ – análogo ao que foi feito no **Exemplo 5***;*

(b) Derivando[a]*, termo a termo, a série de potências de $\sinh(x)$ obtida no* **Exemplo 5** *– aplicação direta do item (b) do* **Teorema 6***;*

[a] Baseado na igualdade $(\sinh(x))' = \cosh(x)$.

Exemplo 6 (Cálculo de Limites). *Suponha que pretende calcular o valor exato do limite* $\lim_{x\to 0}\frac{2xe^{-\frac{x^2}{2}}-2x+x^3}{x^5}$*. Para tal, comece por considerar o desenvolvimento em série de potências de* $e^{-\frac{x^2}{2}}$*, obtido a partir do desenvolvimento em série de potências de* x*, via a substituição* $x\to -\frac{x^2}{2}$*, obtemos*

$$2xe^{-\frac{x^2}{2}}=2x\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\left(-\frac{x^2}{2}\right)^n}{n!}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n!2^{n-1}}x^{2n+1}$$

Em particular, que $T_0^5(2xe^{-\frac{x^2}{2}})=2x-x^3+\frac{1}{4}x^5$ *corresponde ao polinómio Maclaurin de ordem* 5 *da função* $2xe^{-\frac{x^2}{2}}$*. Logo, pelo observado em* **Adenda 5** *segue que*

$$\lim_{x\to 0}\frac{2xe^{-\frac{x^2}{2}}-2x+x^3}{x^5}=\lim_{x\to 0}\frac{T_0^5(2xe^{-\frac{x^2}{2}})+R_0^5(2xe^{-\frac{x^2}{2}})-2x+x^3}{x^5}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{4}x^5}{x^5}+\lim_{x\to 0}\frac{R_0^5(2xe^{-\frac{x^2}{2}})}{x^5}=\frac{1}{4}.$$

Adenda 7 (Abordagem alternativa do Exemplo 6). *Pode verificar-se que* $\sum_{n=3}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n!2^{n-1}}x^{2n+1}$ *corresponde ao desenvolvimento em série de potências da função* f*, definida por* $f(x)=2xe^{-\frac{x^2}{2}}-2x+x^3$*. Para esta função, o* **Teorema 7** *garante-nos que*

(a) $f^{(n)}(0)=0$*, para* $n=0,1,2,3,4$

(b) Para[a] $n=5$*, tem-se* $\frac{f^{(5)}(0)}{5!}=\frac{(-1)^2}{2!2^{2-1}}=\frac{1}{4}$.

pelo que o valor do limite obtido no **Exemplo 6** *coincide com o valor obtido via aplicação sucessiva da regra de L'Hôpital*[b]*.*

[a] Para encontrarmos o coeficiente $a_5=\frac{f^{(5)}(0)}{5!}$, precisámos de considerar a condição $2n+1=5$ nas potências x^{2n+1}.
[b] Vide **Caderno 1**.

Exemplo 7 (Série Geométrica). *Considere-se a função* f *definida por* $f(x)=\frac{1}{x}$*. Esta função é contínua e diferenciável em* $\mathbb{R}\setminus\{0\}$*. Em particular, para* $c\neq 0$ *é possível obter o desenvolvimento em série de potências em torno de* c*, com base na sequência de igualdades*

$$\frac{1}{x}=\frac{1}{c+(x-c)}=\frac{\frac{1}{c}}{1-\frac{c-x}{c}}.$$

Impondo agora a condição[a] $\left|\frac{c-x}{c}\right|<1$*, conclui-se que*

$$\frac{1}{1-\frac{c-x}{c}}=\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{c-x}{c}\right)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{c^n}(x-c)^n$$

e, por conseguinte, que $\frac{1}{x}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{c^{n-1}}(x-c)^n$*, para todo*[b] *o* $x\in]c-|c|,c+|c|[$.

Adicionalmente, o **Teorema 7** *permite-nos concluir que* $\left[\frac{1}{x}\right]_{x=c}^{(n)}=\frac{n!(-1)^n}{c^{n-1}}$*, igualdade essa que pode ser verificada com base no método de indução matemática.*

[a] Esta condição permite-nos obter obter um desenvolvimento em série com base na série geométrica
[b] Intervalo de convergência obtido como conjunto solução da inequação $\frac{|x-c|}{|c|}<1$.

Exemplo 8 (**Derivada da Série Geométrica**). *Note que, para todo o $x \neq 0$, tem-se que $\frac{1}{x^2}$ é a derivada da função $-\frac{1}{x}$.*

Tomando como referência o desenvolvimento em série de potências, em torno de c, obtido no **Exemplo 7**, *podemos concluir via o item (b) do* **Teorema 6** *que*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n(-1)^{n+1}}{c^{n+1}}(x-c)^{n-1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n+1)(-1)^n}{c^{n+2}}(x-c)^n$$

é o desenvolvimento[a] *em série de potências de $\dfrac{1}{x^2}$ no intervalo $]c-|c|, c+|c|[$.*

[a] Na igualdade, envolvendo as duas séries de potências, foi realizada a substituição $n \to n+1$, de modo expressar a série de potências em termos de $(x-c)^n$.

Exemplo 9 (**Série de Potências da Função Logaritmo**). *Se considerasse as substituição $x \to -x$ resp.*

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n \quad (|x| < 1)$$

obtinha facilmente o desenvolvimento em série de potência para a derivada de $\ln(1+x)$.

Adicionalmente, o item (c) do **Teorema 6** *permite-nos obter o desenvolvimento em série de Maclaurin de $\ln(1+x)$. Em concreto, a identidade*

$$\ln(1+x) = \int_0^x \frac{1}{1+t}dt$$

permite-nos obter a seguinte sequências de igualdades:

$$\int_0^x \frac{1}{1+t}dt = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \left(\int_0^x t^n dt\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+1}x^{n+1} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n}x^n.$$

Portanto, a série de potências de $\ln(1+x)$ foi obtida partir da série de potências $\dfrac{1}{1+x}$ no intervalo $]-1,1[$.

Exemplo 10 (**Série de Potências da Função arco-tangente**). *Se considerarmos agora o desenvolvimento em série de potências*

$$\frac{1}{1+x^2} = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^{2n} \quad (|x^2| < 1),$$

obtido a partir da substituição $x \to x^2$ no desenvolvimento em série de potências de $\dfrac{1}{1+x}$, segue pelo item (c) do **Teorema 6** *a seguinte sequências de igualdades:*

$$\arctan(x) = \int_0^x \frac{1}{1+t^2}dt = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \left(\int_0^x t^{2n}dt\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1}x^{2n+1}.$$

pelo que esta série converge uniformemente no intervalo $]-1,1[$.

Adenda 8 (Teorema de Abel). *Para o* **Exemplo 9** *&* **Exemplo 10***, observe ainda o seguinte:*

i) A série de potências de $\ln(1+x)$*, obtida no* **Exemplo 9***, converge simplesmente na extremidade* $x = 1$ *do intervalo* $]-1, 1[$*;*

ii) A série de potências de $\arctan(x)$*, obtida no* **Exemplo 10***, converge absolutamente na extremidades* $x = -1$ *e* $x = 1$ *do intervalo* $]-1, 1[$*.*

Logo, por aplicação direta do **Teorema de Abel** *(vide* **Teorema 5***) segue que:*

i) A série de potências de $\ln(1+x)$*, obtida no* **Exemplo 9***, converge uniformemente no intervalo* $[0, 1]$*;*

ii) A série de potências de $\arctan(x)$*, obtida no* **Exemplo 10***, também converge uniformemente nos intervalos* $[-1, 0]$ *e* $[0, 1]$*.*

Em suma:

i) $]-1, 1]$ *é o* **intervalo de convergência** *da série de potências de* $\ln(1+x)$*;*

ii) $[-1, 1]$ *é o* **intervalo de convergência** *da série de potências de* $\arctan(x)$*.*

Exercícios Propostos

Revisões

(1) Método de Indução Matemática

Use o método de indução matemática para demonstrar as seguintes relações:

(a) $\cos(n\pi) = (-1)^n$, $\forall n \in \mathbb{N}_0$.

(b) $n! > 2^n$, para todo o $n \geq 4$ natural.

Observações:

(a) Indução matemática não se aplica ao conjunto dos números inteiros. Em particular, para demonstrar que $\cos(n\pi) = (-1)^n$, para todo o $n \in \mathbb{Z}$, terá ainda de argumentar que a função cosseno se trata de uma função par.

(b) A desigualdade $n! > 2^n$ é falsa, para valores de $n = 0, 1, 2, 3$.

(2) Polinómio de Maclaurin

Use o polinómio de Maclaurin e o resto de Lagrange da função exponencial para mostrar as seguintes desigualdades:

(a) Para todo o $x \in]0, 1[$, tem-se $e^x < \dfrac{1}{1-x}$.

(b) Para todo o $x \in \mathbb{R}$ e $n \in \mathbb{N}$, tem-se que $e^x > T_0^n(e^x)$.

(c) Para todo o $x \in]0, 2[$, vale a desigualdade

$$e^x < 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{16 - 8x}.$$

Sugestões:

(a) Use a desigualdade $n! \geq 1$ para mostrar que $T_0^n(e^x) \leq 1 + x + \ldots + x^n$. O que acontece se fizer $n \to \infty$ em ambos os lados da desigualdade?

(b) É suficiente demonstrar que o resto de Lagrange da função exponencial, $R_0^n(e^x)$, é sempre positivo

(c) Comece por reescrever a expressão de $T_0^n(e^x)$ na forma

$$T_0^n(e^x) = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \sum_{k=4}^{n} \frac{x^k}{k!}.$$

De seguida, use a desigualdade obtida no item (b) do **Exercício** (1) para mostrar que

$$\sum_{k=4}^{n} \frac{x^k}{k!} < \sum_{k=4}^{n} \frac{x^k}{2^k},$$

ou seja, que no intervalo $]0, 2[$, a soma $\displaystyle\sum_{k=4}^{n} \frac{x^k}{k!}$ é limitada superiormente pela soma de uma progressão geométrica de razão $r = \dfrac{x}{2}$.

Convergência Pontual vs. Convergência Uniforme

3 EXEMPLOS DE SUCESSÕES/SÉRIE DE FUNÇÕES

Considere a sucessão de funções $(f_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$, definida por $f_n(x) = \dfrac{x^2}{(1+x^2)^n}$.

(a) Mostre que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ converge pontualmente para a função nula em $\mathbb{R}$.

(b) Mostre que a série de funções $\sum\limits_{n=0}^{\infty} f_n$ converge pontualmente para a função S, definida por

$$S(x) = \begin{cases} 1+x^2 & , x \neq 0 \\ 0 & , x = 0. \end{cases}$$

(c) Diga, justificando, se a série de funções $\sum\limits_{n=0}^{\infty} f_n$ converge uniformemente em $\mathbb{R}$.

(d) Diga, justificando, se a série de funções $\sum\limits_{n=0}^{\infty} f_n$ converge uniformemente em $\mathbb{R}\backslash]-1,1[$.

SUGESTÕES:

(a) Comece por demonstrar que, para todo o $x \in \mathbb{R}$, $\dfrac{1}{(1+x^2)^n} = \left(\dfrac{1}{1+x^2}\right)^n$ – termo geral da progressão geométrica, de razão $r = \dfrac{1}{1+x^2}$ – converge para zero (0).

(b) Use a fórmula geral da série geométrica para calcular o valor da soma da série $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \left(\dfrac{1}{1+x^2}\right)^n$.

(c) Observe que a soma da série converge pontualmente para uma função descontínua. O que pode concluir a partir do **Teorema 2**?

(d) Tente aplicar o <u>Critério de Weierstraß</u> – vide **Teorema 3**.

Série de Maclaurin de Funções Exponenciais e Logarítmicas

4 DESENVOLVIMENTO EM SÉRIE DE MACLAURIN ENVOLVENDO FUNÇÕES HIPERBÓLICAS

Considere o desenvolvimento em série de Maclaurin da função exponencial, dado por $e^x = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{x^n}{n!}$.

(a) Obtenha o desenvolvimento em série de potência das seguintes funções hiperbólicas

i) $\cosh(2x) = \dfrac{e^{2x}+e^{-2x}}{2}$ ii) $\sinh(2x) = \dfrac{e^{2x}-e^{-2x}}{2}$

(b) Use os desenvolvimentos em série, obtidos na alínea anterior, para obter o desnvolvimento em série das seguintes funções:

i) $\dfrac{1}{3}(e^x+e^{-x})(e^x-e^{-x})$ ii) $\dfrac{1}{4}(e^x+e^{-x})^2 + \dfrac{1}{4}(e^x-e^{-x})^2$

SUGESTÕES:

(a) Vide **Exemplo 5.**

(b) Faça uso das igualdades $(a+b)(a-b) = a^2-b^2$ e $(a+b)^2 = a^2+2b+b^2$.

(5) Funções Logarítmicas

Use o desenvolvimento em série de potências obtido no **Exemplo 9**, para obter o desenvolvimento em série dos seguintes números transcendentes:

(a) -1 (b) $\ln\left(\frac{2}{3}\right)$ (c) $-\ln\left(\frac{3}{4}\right)$

Série de Maclaurin de Funções Trigonométricas e Suas Inversas

(6) Desenvolvimento em série de Maclaurin de Funções seno e cosseno

Tendo como referência o desenvolvimento série de Maclaurin das funções seno e cosseno:

$$\sin(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!} \quad \& \quad \cos(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!}$$

obtenha os desenvolvimentos em série Maclaurin para as funções abaixo.

(a) $\cos\left(\dfrac{\pi x}{2}\right) - 1$ (c) $\cos\left(\dfrac{\pi x}{3}\right)$ (e) $\sin^2\left(\dfrac{\pi x}{4}\right)$

(b) $\dfrac{\pi x}{2} - \sin\left(\dfrac{\pi x}{2}\right)$ (d) $\sin\left(\dfrac{\pi(x+1)}{3}\right)$ (f) $\cos^2\left(\dfrac{\pi x}{4}\right)$

(7) Série de Maclaurin da função arco-tangente

Use a representação em série de potência da função arco-tangente, obtida no **Exemplo 10**, para resolver os itens abaixo.

(a) Diga, justificando, se as séries abaixo são convergentes e, em caso afirmativo, determine o valor da sua soma.

i) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n(\sqrt{3})^{2n+1}}{2n+1}$ ii) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n(-\sqrt{3})^{2n+1}}{3^{2n+1}(2n+1)}$ iii) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n(\sqrt{3})^{2n}}{3^{2n+1}(2n+1)}$

(b) Indique o desenvolvimento em série de potências para os seguintes números transcendentes:

i) $\frac{\pi}{4}$ ii) π iii) $\frac{\pi}{2}$

Observação: Note que $\arctan : \mathbb{R} \to]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$. Em particular, π e $\frac{\pi}{2}$ não são pontos do contradomínio da função arco-tangente.

Série de Taylor vs. Funções Analíticas

(8) Desenvolvimento em série de Maclaurin vs. Desenvolvimento em Série de Taylor

Use os desenvolvimentos em série de Maclaurin tabelados p.e. em (Stewart , 2013, p. 687) para obter a série de Taylor das funções abaixo.

(a) e^{-x} em torno de $c = -\frac{1}{5}$

(b) e^{2x-x^2} em torno de $c = 1$.

(c) $\sin(x)$ em torno de $c = \frac{\pi}{6}$.

(d) $\cos(x)$ em torno de $c = -\frac{\pi}{3}$.

(e) $\ln(2-5x)$ em torno de $c = \frac{1}{5}$.

(f) $\ln(x^2+2x+2)$ em torno de $c = -1$.

(9) Desigualdades e limites envolvendo funções hiperbólicas

Use o desenvolvimento em série de potência de $\cosh(2x)$, obtida no **Exercício** (4), assim como a desigualdade obtida no **Exercício** (1), para mostrar que

$$1 + 2x^2 < \cosh(2x) < 1 + 2x^2 + \frac{x^4}{1-x^2}, \quad \text{para todo o} \quad x \in]-1, 1[.$$

(10) Desenvolvimento em série de Maclaurin vs. Intervalo/Raio de Convergência

Seja $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ o desenvolvimento em série de Maclaurin da função f e $0 < R < +\infty$ o respetivo *raio de convergência*[3]. Demonstre as seguintes afirmações para a funções g e h, definidas por

$$g(x) = f(-x^2) \text{ e } h(x) = xf(x^2).$$

(a) $g^{(2n+1)}(0) = h^{(2n)}(0) = 0$, para todo o $n \in \mathbb{N}_0$.

(b) $(-1)^n g^{(2n)}(0) = h^{(2n+1)}(0) = n! a_n$, para todo o $n \in \mathbb{N}_0$.

(c) As séries de Maclaurin das funções g e h convergem absolutamente em $]-\sqrt{R}, \sqrt{R}[$.

(d) Se a série de Maclaurin de f converge absolutamente em $x = -R$ ou em $x = R$, então $[-\sqrt{R}, \sqrt{R}]$ é o intervalo de convergência das séries de Maclaurin de g e h.

(e) Se a série de Maclaurin de f converge simplesmente em $x = -R$, então $]-\sqrt{R}, \sqrt{R}[$ é o intervalo de convergência da série de Maclaurin de g.

(f) Se a série de Maclaurin de f converge simplesmente em $x = R$, então $]-\sqrt{R}, \sqrt{R}[$ é o intervalo de convergência da série de Maclaurin de h.

(11) Desenvolvimento em série de Maclaurin de Funções Logarítmitas

Determine o desenvolvimento em série de Maclaurin para cada uma das seguintes funções logarítimicas, indicando o maior intervalo para o qual o desenvolvimento é válido.

(a) $\ln\left(\frac{3x+1}{2-3x}\right)$ (b) $\ln\left(\frac{5}{(1+x^2)(x+2)}\right)$ (c) $\ln(x^2 - 4x + 3)$

Sugestões: Pode usar diretamente a fórmula $f(x) = f(0) + \int_0^x f'(t)dt$, que resulta do *Teorema Fundamental do Cálculo*, e/ou uma das seguintes sugestões abaixo:

(a) Propriedades $\ln\left(\frac{z}{w}\right) = \ln(z) - \ln(w)$ e $\ln(\alpha x + \beta) = \ln(\beta) + \ln\left(\frac{\alpha}{\beta}x + 1\right)$ $(\beta > 0)$;

(b) Propriedade $\ln(zw) = \ln(z) + \ln(w)$ & propriedades mencionadas em (a);

(c) Fatorização $x^2 - 4x + 3 = (x - r_1)(x - r_3) - r_1, r_2$ raízes de $x^2 - 4x + 3$ para poder deduzir a série de Taylor com base nas sugestões dadas em (a) e (b) – i.e. sem precisar de aplicar o *Teorema Fundamental do Cálculo.*

Convergência Uniforme de Séries de Potências

(12) Integração de série de potências

Determine a representação em série de potência para cada uma das seguintes funções:

(a) Função Erro

$$\operatorname{erf}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{-\frac{t^2}{2}} dt$$

(b) Integral de Fresnel

$$S(x) = \int_0^x \sin(t^2) dt.$$

[3] O raio de convergência pode ser definido, via uma das seguintes fórmulas: $R = \lim_{n\to\infty} \frac{|a_n|}{|a_{n+1}|}$ resp. $R = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{|a_n|}}$.

(13) DESENVOLVIMENTO EM SÉRIE GEOMÉTRICA VS. DERIVAÇÃO DE SÉRIES DE POTÊNCIAS

Determine o desenvolvimento em série geométrica para cada uma das seguintes funções racionais, indicando o maior intervalo para o qual o desenvolvimento é válido.

(a) $\dfrac{1}{(x+2)^2}$ (b) $\dfrac{x}{(1+x^2)^2}$ (c) $\dfrac{5}{(1+x^2)(x+2)^2}$

SUGESTÕES:

(a) Calcule a derivada de $\dfrac{1}{x+2}$.

(b) Calcule a derivada de $\dfrac{1}{1+x^2}$.

(c) Para poder usar, a posteriori, o desenvolvimento em série de potências obtidos anteriormente, terá de considerar a representação em frações parciais da forma
$\dfrac{5}{(1+x^2)(x+2)^2} = \dfrac{Ax+B}{1+x^2} + \dfrac{C}{x+2} + \dfrac{D}{(x+2)^2}$ – A, B, C, D constantes a determinar.

(14) APLICAÇÃO DO TEOREMA DE ABEL

Sejam f e g as funções definidas

$$f(x) = \int_0^x \frac{1}{27+t^3}dt \quad \& \quad g(x) = \int_0^x \frac{1}{81+t^4}dt.$$

(a) Determine o desenvolvimento em série de potências das funções f e g.

(b) Diga, justicando, qual o intervalo da forma $I =]-R, R[$ $(0 < R < \infty)$ em que as séries de potências f e g convergem uniformemente.

(c) Use o **Teorema 5** para averiguar se f e g convergem uniformemente em intervalos fechados da forma $[-R, 0]$ e $[0, R]$.

(d) Comente a veracidade das seguintes afirmações (**V**erdadeiro ou **F**also), justificando convenientemente a sua resposta.

i) O intervalo de convergência das funções derivadas f' e g' não coincide.

ii) O intervalo de convergência de f e f' coincide.

iii) O intervalo de convergência de g e g' não coincide.

iv) O intervalo de convergência de f e g coincide.

v) O desenvolvimento em série de potências de $\displaystyle\int_0^x \frac{1+t^2}{27+t^3}dt$ coincide com o desenvolvimento em série de potências de $f(x) + \ln(27 + x^3)$.

vi) O desenvolvimento em série de potências de $\displaystyle\int_0^x \frac{1-t^2}{81+t^4}dt$ coincide com o desenvolvimento em série de potências de $g(x) - \dfrac{1}{27}\arctan\left(\dfrac{x^2}{9}\right)$.

(15) FUNÇÕES DE BESSEL

Considere o desenvolvimento em série de Maclaurin da função de Bessel de ordem m $(m \in \mathbb{N}_0)$, dada por

$$J_m(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2^{m+2n} n!(m+n)!} x^{m+2n}.$$

(a) Mostre que $(J_m)_{m\in\mathbb{N}_0}$ é uma sucessão de funções analíticas em $\mathbb{R}$.

(b) Verifique que $J_0' = -J_1$.

16 Exercício Computacional

Use a app, disponível no link

https://www.geogebra.org/m/cwgzt54x,

para gerar o polinómios de Maclaurin de ordem n, $T_0^n(\tan(x))$ e $T_0^n(\sec^2(x))$. A partir destes:

(a) Calcule numericamente o valor dos limites $\lim_{x\to 0} \frac{\tan(x)}{x^n}$, para valores de $n = 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7$.

(b) Verifique numericamente a igualdade $\lim_{x\to 0} \frac{\tan(x)}{x^n} = \lim_{x\to 0} \frac{\sec^2(x)}{nx^{n-1}}$, para valores de $n = 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7$.

Desafios

17 Soma de série de Potências

Use desenvolvimento de séries de potências conhecidos e/ou derivação/integração para calcular a soma das seguintes seguintes séries numéricas de termos alternados:

i) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!}$ ii) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n(-1)^n}{3^{n-1}}$ iii) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)(2n+3)}$

18 Desenvolvimento em série de Maclaurin envolvendo Funções Pares e Ímpares

Seja $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ o desenvolvimento em série de Maclaurin da função f e $R = \lim_{n\to\infty} \frac{|a_n|}{|a_{n+1}|}$ o respetivo *raio de convergência*[4].

(a) Demonstre as seguintes igualdades:

i) $f(x) + f(-x) = \sum_{n=0}^{\infty} 2a_{2n} x^{2n}$ ii) $f(x) - f(-x) = \sum_{n=0}^{\infty} 2a_{2n+1} x^{2n+1}$

(b) Comente a veracidade das seguintes afirmações (**V**erdadeiro ou **F**also), justificando convenientemente a sua resposta.

i) Se $R = +\infty$ e f é uma função ímpar, então $f^{(2n+1)}(0) = 0$ para todo o $n \in \mathbb{N}_0$.

ii) Se $R = +\infty$ e f é uma função ímpar, então $f(-x) = -x \sum_{n=0}^{\infty} a_{2n+1} x^{2n}$.

iii) R^2 é o raio de convergência da série de Maclaurin de $f(x) + f(-x)$.

iv) Se $0 < R < +\infty$, então o raio de convergência das séries de Maclaurin de $f(x) - f(-x)$ e $f(x)$ coincidem.

v) Se $0 < R < +\infty$, então a série de Maclaurin de $f(x) + f(-x)$ converge absolutamente no intervalo $]-\sqrt{R}, \sqrt{R}[$.

vi) Se $0 < R < +\infty$ e $]-R, R]$ é o intervalo de convergência da série de Maclaurin de f, então a série de Maclaurin de $f(x) - f(-x)$ e de $f(x) + f(-x)$ convergem absolutamente em $x = -\sqrt{R}$.

[4] Também poderia ser dito que $R = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{|a_n|}}$.

19 Funções Trigonométricas vs. Funções Esféricas de Bessel

Considere o desenvolvimento em série de Maclaurin da função esférica de Bessel de ordem m ($m \in \mathbb{N}_0$), dada por

$$\mathbf{j}_m(x) = 2^m \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (m+n)!}{(2m+2n+1)!} x^{m+2n}.$$

(a) Mostre que $(\mathbf{j}_m)_{m\in\mathbb{N}_0}$ é uma sucessão de funções analíticas em $\mathbb{R}$.

(b) Verifique as seguintes igualdades para valores de $x \neq 0$:

i) $\mathbf{j}_0(x) = \dfrac{\sin(x)}{x}$ ii) $\mathbf{j}_1(x) = \dfrac{\sin(x)}{x^2} - \dfrac{\cos(x)}{x}$ iii) $\mathbf{j}_2'(x) = \mathbf{j}_1(x) - \dfrac{3}{x}\mathbf{j}_2(x)$

20 Símbolo de Pochammer vs. Série Binomial[5]

Para todo o $\alpha \in \mathbb{R}$, considere a série de Maclaurin de $(1+x)^\alpha$, dada por

$$(1+x)^\alpha = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n(-\alpha)_n}{n!} x^n,$$

onde $(-\alpha)_n = -\alpha(-\alpha+1)\ldots(-\alpha+(n-1))$ denota o símbolo de Pochhammer.

(a) Se $\alpha \in \mathbb{N}_0$, mostre que $(1+x)^\alpha = \displaystyle\sum_{n=0}^{\alpha} \begin{pmatrix} \alpha \\ n \end{pmatrix} x^n.$

(b) Determine o domínio e o raio de convergência da série de Maclaurin de $(1+x)^\alpha$, para valores de $\alpha \notin \mathbb{N}$.

(c) Comente a veracidade das seguintes afirmações (**V**erdadeiro ou **F**also), justificando convenientemente a sua resposta.

i) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-\alpha)_n}{n!} = 0$, para todo o $\alpha \in \mathbb{N}_0$.

ii) $(-1)^n(-\alpha)_n = 0$, para todo o $n \in \mathbb{N}_0$ se $\alpha \notin \mathbb{N}$.

iii) $(-1)^n(-\alpha)_n = 0$, para todo o $n \in \mathbb{N}_0$ se $\alpha < n$.

iv) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\alpha} \frac{(-1)^n(-\alpha)_n}{n!} = 2^\alpha$, para todo o $\alpha \in \mathbb{R}$.

v) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-\alpha)_n}{2^n n!} = 2^{-\alpha}$, para todo o $\alpha \in \mathbb{R}$.

vi) Para todo o $x \in]-1,1[$, tem-se $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n(-\alpha)_n}{n!} x^n \neq 0$, desde que $\alpha \notin \mathbb{N}$.

Sugestões:

(a) Atendendo a que $\dfrac{d^n}{dx^n}(1+x)^\alpha = 0$, para valores de ($\alpha \in \mathbb{N}_0$ e $n > \alpha$), é suficiente verificar a equivalência abaixo (explique o porquê):

$$\begin{pmatrix} \alpha \\ n \end{pmatrix} = \frac{(-1)^n(-\alpha)_n}{n!} \Longleftrightarrow \left[\frac{d^n}{dx^n}(1+x)^\alpha\right]_{x=0} = \frac{\alpha!}{(\alpha-n)!}.$$

(b) Use o critério da razão (ou de D'Alembert).

(c) Tenha cuidado, pois $(1+x)^\alpha$ apenas nos dá um polinómio para o caso de $\alpha \in \mathbb{N}_0$.

[5]Exercício corresponde a uma reformulação de (Stewart , 2013, pp. 685-686, Exemplo 8).

Bibliografia

Almeida (2018) A. Almeida, *Cálculo II – Texto de apoio* (versão fev. 2018)
Disponível na plataforma Moodle da UA.

Apostol (1983) T. M. Apostol, Cálculo: Volume 1, Editora Revertè, Rio de Janeiro, 1983.

Brás (2020) I. Brás, *Sucessões e Séries de Funções; Séries de potências(revisitadas) e Séries de Fourier* (versão 26/2/2023)[6]
Disponível na plataforma Moodle da UA.

Stewart (2013) J. Stewart, *Cálculo: Volume 2*, Tradução da 7ª edição norte-americana, São Paulo, Cengage Learning, 2013
Formato Digital: disponível a partir `desta hiperligação` [só clicar no texto a azul]

[6]Aparece no Moodle com o título *Slides para o Capítulo 2*.