

Questão 2(c): resolução

Calcula as primitivas da seguinte função: $\frac{x^2}{\sqrt{4-x^2}}$.

A função está definida no intervalo $I =]-2, 2[$ (onde $4 - x^2 > 0$) e, sendo contínua, é primitivável. As suas primitivas podem ser calculadas (principalmente) de duas formas diferentes.

- Através da seguinte substituição, realizada pela função φ , diferenciável e invertível no intervalo indicado,

$$x = \varphi(t) = 2 \sin t, \quad t \in J =]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[\quad dx = \varphi'(t) dt = 2 \cos t dt$$

$$t = \varphi^{-1}(x) = \arcsin \frac{x}{2}, \quad x \in]-2, 2[\quad \sqrt{4-x^2} = \sqrt{4-4\sin^2 t} = 2\sqrt{1-\sin^2 t} = 2 \cos t$$

(visto que $\cos t > 0$ no intervalo J), em intervalos contidos em I obtém-se:

$$\begin{aligned} \int \frac{x^2}{\sqrt{4-x^2}} dx &= \int \frac{(2 \sin t)^2}{2 \cos t} 2 \cos t dt \\ &= \int 4 \sin^2 t dt \\ &= \int 2 - 2 \cos(2t) dt \end{aligned} \tag{1}$$

$$\begin{aligned} &= 2t - \sin(2t) + C \\ &= 2t - 2 \sin t \cos t + C \end{aligned} \tag{2}$$

$$= 2 \arcsin \frac{x}{2} - \frac{x}{2} \sqrt{4-x^2} + C, \quad C \in \mathbb{R}, \tag{3}$$

usando $\sin^2 t = \frac{1-\cos(2t)}{2}$ na (1), $\sin(2t) = 2 \sin t \cos t$ na (2) e as substituições $\sin t = \frac{x}{2}$ e $2 \cos t = \sqrt{4-x^2}$ na (3).

- Primitivando por partes, sempre em intervalos contidos em I , tem-se que

$$\begin{aligned} \int \frac{x^2}{\sqrt{4-x^2}} dx &= \int -x \cdot \frac{-2x}{2\sqrt{4-x^2}} dx \\ &= -x\sqrt{4-x^2} - \int -\sqrt{4-x^2} dx \end{aligned} \tag{4}$$

$$= -x\sqrt{4-x^2} + \int \frac{4-x^2}{\sqrt{4-x^2}} dx$$

$$= -x\sqrt{4-x^2} + \int \frac{4}{\sqrt{4-x^2}} dx - \int \frac{x^2}{\sqrt{4-x^2}} dx$$

\Downarrow

$$2 \int \frac{x^2}{\sqrt{4-x^2}} dx = -x\sqrt{4-x^2} + \int \frac{4}{2\sqrt{1-\frac{x^2}{4}}} dx$$

\Downarrow

$$\int \frac{x^2}{\sqrt{4-x^2}} dx = -\frac{x}{2}\sqrt{4-x^2} + 2 \int \frac{\frac{1}{2}}{\sqrt{1-(\frac{x}{2})^2}} dx$$

$$= -\frac{x}{2}\sqrt{4-x^2} + 2 \arcsin \frac{x}{2} + C, \quad C \in \mathbb{R}. \tag{5}$$

Em (4) e em (5), a primitiva é quase imediata: $\int \frac{u'}{2\sqrt{u}} dx = \sqrt{u} + C$, com $u = 4 - x^2$ e $u' = -2x$, no primeiro caso e $\int \frac{u'}{\sqrt{1-u^2}} dx = \arcsin u + C$, com $u = \frac{x}{2}$ e $u' = \frac{1}{2}$, no segundo, sendo $C \in \mathbb{R}$ uma constante arbitrária.