

Departamento de Matemática da Universidade de Aveiro  
**Álgebra Linear e Geometria Analítica - agrupamento IV**

11/02/2022

**exame final**

duração: **2h30min**

nome: \_\_\_\_\_ n.º mecanográfico: \_\_\_\_\_

declaro que desisto: \_\_\_\_\_ **n.º folhas adicionais:** \_\_\_\_\_

*O exame tem **6 questões**. Justifique detalhadamente as respostas.*

**Questão 1** - cotação 3.0

Considere os parâmetros reais  $\alpha$  e  $\beta$ , a matriz  $A = \begin{bmatrix} 1 & 6 & 3 & 4 \\ 0 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \beta & \beta \\ 0 & 0 & 0 & \beta - 1 \end{bmatrix}$  e o vetor  $B = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ \alpha \\ \alpha - 1 \end{bmatrix}$ .

Determine, justificando, para que valores de  $\alpha$  e  $\beta$  o sistema  $AX = B$  é

- (i) possível e determinado.
- (ii) possível e indeterminado.
- (iii) impossível.

Departamento de Matemática da Universidade de Aveiro  
**Álgebra Linear e Geometria Analítica - agrupamento IV**

11/02/2022

**exame final**

duração: **2h30min**

nome: \_\_\_\_\_ n.º mecanográfico: \_\_\_\_\_

declaro que desisto: \_\_\_\_\_ n.º folhas adicionais: \_\_\_\_\_

*O exame tem **6 questões**. Justifique detalhadamente as respostas.*

**Questão 2** - cotação 5.0

Seja  $N = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 8 \\ 0 & 2 & 8 \\ 0 & 1 & -k \end{bmatrix}$ , onde  $k$  é um parâmetro real.

- Determine os valores de  $k$  para os quais a matriz  $N$  é invertível.
- Considere  $k = -2$ . Seja  $A$  uma matriz de ordem 3 tal que  $\det(A) = 4$ . Calcule  $\det(2A^T N^{-1})$ .
- Mostre que 1 é valor próprio de  $N$ , para qualquer  $k \in \mathbb{R}$ .
- Considere  $k = 0$ . Mostre que  $u = (2, 2, -1)$  é um vetor próprio de  $N$  e determine o valor próprio de  $N$  que tem  $u$  como vetor próprio.

Departamento de Matemática da Universidade de Aveiro  
**Álgebra Linear e Geometria Analítica - agrupamento IV**

11/02/2022

**exame final**

duração: **2h30min**

nome: \_\_\_\_\_ n<sup>o</sup> mecanográfico: \_\_\_\_\_

declaro que desisto: \_\_\_\_\_ **n<sup>o</sup> folhas adicionais:** \_\_\_\_\_

*O exame tem **6 questões**. Justifique detalhadamente as respostas.*

**Questão 3** - cotação 3.0

Considere a reta  $\mathcal{R}$  definida pelas equações cartesianas

$$\begin{cases} x + y - z = 2 \\ x - y + z = 0 \end{cases}$$

e o plano  $\Pi$  que passa no ponto  $P(4, 1, 1)$  e é ortogonal ao vetor  $u = (1, 5, -5)$ . Determine a posição relativa e a distância entre o plano  $\Pi$  e a reta  $\mathcal{R}$ .

Departamento de Matemática da Universidade de Aveiro  
**Álgebra Linear e Geometria Analítica - agrupamento IV**

11/02/2022

**exame final**

duração: **2h30min**

nome: \_\_\_\_\_ n.º mecanográfico: \_\_\_\_\_

declaro que desisto: \_\_\_\_\_ **n.º folhas adicionais:** \_\_\_\_\_

*O exame tem **6 questões**. Justifique detalhadamente as respostas.*

**Questão 4** - cotação 3.0

Considere o subespaço  $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x + y + z = 0\}$  e os vetores  $X = (-1, 0, 0)$  e  $Y = (0, 1, -1)$ .

- Determine uma base para  $S$  e a dimensão de  $S$ .
- Verifique se  $X$  e  $Y$  são elementos de  $S$ . Em caso afirmativo, indique o vetor de coordenadas na base determinada.
- Determine a projeção ortogonal do vetor  $Z = (2, 2, 1)$  no subespaço  $K$  gerado por  $X$  e  $Y$ .

Departamento de Matemática da Universidade de Aveiro  
**Álgebra Linear e Geometria Analítica - agrupamento IV**

11/02/2022

**exame final**

duração: **2h30min**

nome: \_\_\_\_\_ n.º mecanográfico: \_\_\_\_\_

declaro que desisto \_\_\_\_\_ n.º folhas adicionais: \_\_\_\_\_

*O exame tem **6 questões**. Justifique detalhadamente as respostas.*

**Questão 5** - cotação 3.0

Considere a cónica com equação geral  $x^2 + 4y^2 + 4xy + 2x - y + 5 = 0$ .

- Sendo  $X = [x \ y]^T$ , determine as matrizes  $A$  e  $B$  tais que a equação matricial da cónica apresentada seja dada por  $X^T A X + B X + 5 = 0$ .
- Encontre uma matriz ortogonal  $P$  diagonalizante de  $A$ .
- Obtenha uma equação reduzida da cónica. Classifique a cónica.

Departamento de Matemática da Universidade de Aveiro  
**Álgebra Linear e Geometria Analítica - agrupamento IV**

11/02/2022

**exame final**

duração: **2h30min**

nome: \_\_\_\_\_ n.º mecanográfico: \_\_\_\_\_

declaro que desisto: \_\_\_\_\_ **n.º folhas adicionais:** \_\_\_\_\_

*O exame tem **6 questões**. Justifique detalhadamente as respostas.*

**Questão 6** - cotação 3.0

Seja  $\phi: \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^2$  uma aplicação linear tal que  $\phi(X) = AX$  com  $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & -1 & 3 \end{bmatrix}$ .

Seja  $\mathcal{C}_4$  a base canónica de  $\mathbb{R}^4$  e  $\mathcal{B} = ((1, -1), (1, 2))$  uma base de  $\mathbb{R}^2$ .

- a) Determine o núcleo de  $\phi$ .
- b)  $\phi$  é injetiva?  $\phi$  é sobrejetiva? Justifique.
- c) Determine a matriz de  $\phi$  relativa às bases  $\mathcal{C}_4$  e  $\mathcal{B}$ .