Universidade de Aveiro
Departamento de Matemática

Cálculo II - Agrupamento 4 **2022/23**

Folha 2: *Séries de Funções (em geral) — Série de Taylor (rev.) — Série de Fourier*

---

1. Considere a série de funções
$$S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(nx)}{n\sqrt{n+1}}.$$
   (a) Mostre que a série converge uniformemente em $\mathbb{R}$.
   (b) Justifique que a função (soma) $S(x)$ é contínua em $\mathbb{R}$.
   (c) Mostre que
$$\int_0^{\pi} S(x)\,dx = 0.$$

2. Obtenha uma representação em série de potências (de Taylor) para cada uma das seguintes funções, a partir dos desenvolvimentos conhecidos das funções exponencial, seno, co-seno e $\frac{1}{1-x}$. Em cada caso, indique o maior conjunto onde é válida a representação.
$$\text{(a)}\ \ e^{-x^2}\,; \quad \text{(b)}\ \ \cosh x\,; \quad \text{(c)}\ \ \operatorname{senh}(3x)\,; \quad \text{(d)}\ \ 2\cos^2 x\,; \quad \text{(e)}\ \ \frac{1}{4+x^2}.$$

3. Calcule a (função) soma das séries seguintes:
   (a) $1 - x + \dfrac{x^2}{2!} - \dfrac{x^3}{3!} + \dfrac{x^4}{4!} - \cdots + (-1)^n \dfrac{x^n}{n!} + \cdots$
   (b) $1 - x^3 + x^6 - x^9 + \cdots + (-1)^n x^{3n} + \cdots$

4. (a) Determine o desenvolvimento em série de MacLaurin da função $\ln(x+1)$.
   (Sugestão: desenvolva primeiro a função $\dfrac{1}{x+1}$ em série de MacLaurin).
   (b) Calcule a soma da série
$$\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3\cdot 2} + \frac{x^4}{4\cdot 3} - \frac{x^5}{5\cdot 4} + \cdots + \frac{(-1)^n\, x^{n+2}}{(n+1)(n+2)} + \cdots$$

5. Calcule a soma das séries indicadas (a soma corresponde a $f(a)$, onde a é um número óbvio e f é dada por uma série de potências. Em geral, a série deverá ser manipulada até se encontrar uma série de potências conhecida):
$$\text{(a)}\ \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n 2^{2n} \pi^{2n}}{(2n)!}\,; \quad \text{(b)}\ \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n)!}\,; \quad \text{(c)}\ \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{3^n(n+1)}\,; \quad \text{(d)}\ \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2n+1}{2^n n!}.$$

6. (a) Verifique que a série de potências $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{nx^n}{2^n}$ tem raio de convergência igual a 2.
   (b) Seja $f(x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^n} x^n\,, \quad -2 < x < 2$. Explicite $f(x)$.
   (Sugestão: use a representação em série de potências de $\frac{1}{1-x}$).

7. Usando representações adequadas em série de potências, justifique que:

$$\text{(a)} \lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x} = 1 \ ; \qquad \text{(b)} \lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1.$$

8. Considere a série de potências $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-3)^n}{n2^n}$.

   (a) Determine o maior subconjunto de $\mathbb{R}$ no qual a série é absolutamente convergente.

   (b) Calcule $f'(4)$, onde $f(x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-3)^n}{n2^n}$ (f definida no domínio de convergência da série).

9. Sabendo que $e^x = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$ para todo $x \in \mathbb{R}$:

   (a) obtenha uma representação em série de potências para a função $f(x) = xe^{x^3}$ e indique o maior subconjunto de $\mathbb{R}$ em que esta representação é válida;

   (b) obtenha uma representação em série numérica do integral $\displaystyle\int_0^1 xe^{x^3}dx$.

10. Usando a representação em série de MacLaurin da função exponencial, justifique a igualdade

$$\left(e^{x^2}\right)' = 2x\, e^{x^2}\,, \quad x \in \mathbb{R}.$$

11. Seja $f(x) = x\, e^{-x}$, $x \in \mathbb{R}$.

    (a) Desenvolva $f(x)$ em série de MacLaurin.

    (b) Calcule a soma da série $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n (n+1)2^n}{n!}$
    (Sugestão: Começar por derivar a série obtida em (a)).

    (c) Usando a fórmula de MacLaurin com resto de Lagrange, obtenha um majorante para o erro cometido ao aproximar $f(x)$ por $T_0^2 f(x)$ no intervalo $]0, 0.1]$.

12. Determine a série de Fourier das seguintes funções:

    (a) $f(x) = x + x^2\,, \quad x \in [-\pi, \pi[$;

    (b) $g(x) = e^x\,, \quad x \in [-\pi, \pi[$;

    (c) $h(x) = \begin{cases} -1\,, & -\pi \le x < 0, \\ 0\,, & x = 0, \\ 1\,, & 0 < x < \pi. \end{cases}$

13. Considere a função constante $f(x) = 2$ no intervalo $[0, \pi]$. Determine a série de Fourier de senos e a série de Fourier de cossenos de f e represente graficamente as respetivas somas no intervalo $[-3\pi, 3\pi]$.

14. Determine a série de Fourier de senos da função f dada $f(x) = \cos x$ em $[0, \pi]$. Qual será a sua série de Fourier de cossenos?

15. Considere a função f, 2π-periódica, definida por $f(x) = x^2$, $-\pi \le x \le \pi$.

    (a) Determine a série de Fourier de f.

(b) Mostre que

$$x^2 = \frac{\pi^2}{3} + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{4}{n^2} \cos(nx)\,, \qquad \forall x \in [-\pi, \pi].$$

(c) Usando a representação de f em série de Fourier, mostre que

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} = -\frac{\pi^2}{12} \qquad \text{e} \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}.$$

(d) Verifique que a série de Fourier de f é uniformemente convergente em $\mathbb{R}$.

(e) Justifique que

$$\frac{x^3 - \pi^2 x}{3} = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{4}{n^3} \operatorname{sen}(nx)\,, \qquad \forall x \in [-\pi, \pi].$$

16. Seja f a função 2π-periódica tal que $f(x) = |\operatorname{sen} x|$, $-\pi \leq x \leq \pi$.

(a) Mostre que a série de Fourier associada é

$$\frac{2}{\pi} - \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(2nx)}{4n^2 - 1}.$$

(b) Verifique que a série da alínea anterior é uniformemente convergente em $\mathbb{R}$ e identifique a sua soma, $s(x)$.

(c) Esboce o gráfico da soma $s(x)$ no intervalo $[-2\pi, 2\pi]$.

(d) Calcule a soma da série $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{4n^2 - 1}$.