Universidade de Aveiro **Departamento de Matemática**

1. Calcule os seguintes determinantes:

$$\text{(a)} \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 7 \end{vmatrix}; \quad \text{(b)} \begin{vmatrix} 0 & 3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}; \quad \text{(c)} \begin{vmatrix} \sin\alpha & -\cos\alpha \\ \cos\alpha & \sin\alpha \end{vmatrix}; \quad \text{(d)} \begin{vmatrix} 0 & 7 & 1 \\ 4 & 1 & 2 \\ 1 & 7 & 3 \end{vmatrix}; \quad \text{(e)} \begin{vmatrix} 1 & 7 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \end{vmatrix}.$$

Propriedades dos determinantes

2. Mostre que se c é um número real e A é uma matriz do tipo $n \times n$, então $\det(cA) = c^n \det(A)$.

3. Se A e B são matrizes 5×5 tais que $|A| = 3$ e $|B| = -5$, determine, justificando, os seguintes determinantes:

   (a) $|A^T|$; (b) $|AB|$; (c) $|A^4|$; (d) $|B^{-1}|$; (e) $|2A|$; (f) $|2A^{-1}|$; (g) $\left|(2A)^{-1}\right|$; (h) $|AB^{-1}A^T|$.

4. Sejam A e B matrizes de ordem 2. Sabendo que $\det(AB^{-1}) = 2$ e $\det((2A)^{-1}B(A^\top)^2) = 8$, calcule $\det(A)$ e $\det(B)$.

5. Sem calcular explicitamente o determinante, mostre que

$$\text{(a)} \begin{vmatrix} a & b & c \\ e & 0 & 0 \\ f & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0; \quad \text{(b)} \begin{vmatrix} b+c & c+a & b+a \\ 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \end{vmatrix} = 0; \quad \text{(c)} \begin{vmatrix} a_1+b_1 & a_1-b_1 & c_1 \\ a_2+b_2 & a_2-b_2 & c_2 \\ a_3+b_3 & a_3-b_3 & c_3 \end{vmatrix} = -2 \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}.$$

6. Utilizando apenas propriedades dos determinantes, calcule:

$$\text{(a)} \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ a_1+b_1+c_1 & a_2+b_2+c_2 & a_3+b_3+c_3 \end{vmatrix}, \text{ sabendo que } \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = -3;$$

$$\text{(b)} \begin{vmatrix} b_1 & b_3 & b_2 \\ c_1 & c_3 & c_2 \\ a_1 & a_3 & a_2 \end{vmatrix}, \text{ sabendo que } \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = 10;$$

$$\text{(c)} \begin{vmatrix} a_1 & 2b_1 & 4c_1+a_1 \\ a_2 & 2b_2 & 4c_2+a_2 \\ a_3 & 2b_3 & 4c_3+a_3 \end{vmatrix}, \text{ sabendo que } \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = 2;$$

$$\text{(d)} \begin{vmatrix} a_1+2b_1 & a_2+2b_2 & a_3+2b_3 \\ 3c_1+b_1 & 3c_2+b_2 & 3c_3+b_3 \\ -b_1 & -b_2 & -b_3 \end{vmatrix}, \text{ sabendo que } \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = 1;$$

$$\text{(e)} \begin{vmatrix} a_1+a_2 & a_3 & 2a_3+5a_1 \\ b_1+b_2 & b_3 & 2b_3+5b_1 \\ c_1+c_2 & c_3 & 2c_3+5c_1 \end{vmatrix}, \text{ sabendo que } \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = 1.$$

7. Seja B a matriz obtida da matriz A por aplicação da sequência de operações elementares: $L_3 := 2L_3$, $L_1 \longleftrightarrow L_2$, $L_3 := L_3 + 4L_1$ e $L_4 := L_4 - 2L_1$. Sabendo que $\det(A) = -2$, calcule $\det(B)$.

Teorema de Laplace

8. Calcule os determinantes seguintes usando o Teorema de Laplace:

$$\text{(a)} \begin{vmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 4 & 5 & 1 \\ 5 & 10 & 4 \end{vmatrix}; \quad \text{(b)} \begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 4 & 1 & -2 \\ 7 & 5 & -6 \end{vmatrix}; \quad \text{(c)} \begin{vmatrix} 3 & -2 & 7 & 0 \\ 1 & -2 & -3 & 8 \\ 6 & 0 & -1 & 8 \\ -1 & 2 & 5 & 2 \end{vmatrix}; \quad \text{(d)} \begin{vmatrix} 0 & 1 & 4 & 5 \\ -1 & -2 & -4 & 6 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 7 & 2 \end{vmatrix}; \quad \text{(e)} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}.$$

Matrizes invertíveis, matriz adjunta e matriz inversa

9. Considere matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ -2 & 1 & 1 \end{bmatrix}$.
   (a) Calcule o determinante de A.
   (b) A partir da matriz A obtenha uma matriz B tal que $\det(B) = 2\det(A)$. Justifique.
   (c) Calcule a adjunta de A.
   (d) Verifique que A é invertível e calcule a inversa de A.

10. Calcule, caso exista, a inversa das seguintes matrizes:

$$\text{(a)} \begin{bmatrix} 3 & 4 & -1 \\ 0 & 5 & -4 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}; \quad \text{(b)} \begin{bmatrix} 4 & -2 & 6 \\ -1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}; \quad \text{(c)} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ -1 & 2 & -3 & 4 \\ 0 & 5 & 0 & -2 \end{bmatrix}; \quad \text{(d)} \begin{bmatrix} a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c & 0 \\ 0 & 0 & 0 & d \end{bmatrix}, \, a,b,c,d \in \mathbb{R} \setminus \{0\}.$$

11. Considere a matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$.
   (a) Calcule o determinante de A.
   (b) Calcule o elemento $(2,3)$ da adjunta de A e o elemento $(2,3)$ da inversa de A.

12. Considere a matriz $A = \begin{bmatrix} 2 & a-1 & 0 \\ -3 & 2 & 1 \\ 0 & a+1 & -2 \end{bmatrix}$, onde $a \in \mathbb{R}$.
   (a) Calcule o determinante de A através do teorema de Laplace.
   (b) Determine todos os valores de a para os quais a matriz A é singular.
   (c) Considere $a = -2$. Calcule o elemento (1,2) da inversa de A, sem calcular A^{-1}.

13. Se
$$A = \begin{bmatrix} \beta & 6 & 1 \\ 0 & \beta - 1 & 1 \\ 0 & 1 & \beta + 5 \end{bmatrix},$$
determine todos os valores de β para os quais o sistema homogéneo $AX = 0$ apenas admite a solução trivial.

14. Seja A uma matriz $n \times n$ com determinante não nulo. Mostre que $A\,(\operatorname{adj} A) = \det(A)\, I_n$ e conclua que $\det(\operatorname{adj} A) = \big(\det(A)\big)^{n-1}$.

15. Calcule a adjunta da matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$ e efetue o produto $A\,(\operatorname{adj} A)$. Sem efetuar mais cálculos indique o valor do determinante de A.

Regra de Cramer

16. Diga em que condições se pode usar a regra de Cramer para resolver um sistema de equações lineares $AX = B$.

17. Se possível, resolva os seguintes sistemas de equações lineares, usando a regra de Cramer:

$$\text{(a)} \begin{cases} x - y - z = 0 \\ 4x + 2y - 4z = 6 \\ 3x + 2y - z = -1 \end{cases} \qquad \text{(b)} \begin{cases} 4x - 3z = -2 \\ 2x - y = -2 \\ x - 3y + z = 4 \end{cases} \qquad \text{(c)} \begin{cases} x + 3y + 2z + w = 0 \\ 2y + z + 3w = 4 \\ 2x + y - z + 2w = 5 \\ 3x - z + 3w = 9 \end{cases}$$

Aplicações geométricas do determinante

18. Determine a área
    (a) do paralelogramo com um vértice na origem e lados correspondentes aos vetores $u = (-3, 5)$ e $v = (2, 1)$;
    (b) de um paralelogramo com vértices $B(1, -1)$, $C(3, 1)$ e $D(-2, -3)$.

19. Seja $a \in \mathbb{R}$. Considere os paralelepípedos $\mathcal{P}_a$ com um vértice na origem e arestas determinadas pelos vetores $u = (2, -3, 0)$, $v = (a - 1, 2, a + 1)$ e $w = (0, 1, -2)$. Calcule todos os valores de a para os tais o volume de $\mathcal{P}_a$ é 4. (Sugestão: consulte os cálculos efetuados no exercício 12.)

Exercícios de aplicação das propriedades dos determinantes

20. Seja A uma matriz quadrada de ordem n e B e C matrizes tais que $AB = AC$.
    Mostre que se $\det(A) \neq 0$, então $B = C$. Mostre ainda através de um exemplo não trivial que esta conclusão pode não ser válida se $\det(A) = 0$.

21. Mostre que:
    (a) Se A é uma matriz $n \times n$, então $\det(AA^T) \geq 0$;
    (b) Se A e B são matrizes quadradas e $AB = I_n$, então $\det(A) \neq 0$ e $\det(B) \neq 0$;
    (c) Sendo A e B matrizes $n \times n$, se A é singular, então AB também é uma matriz singular;
    (d) Se A é uma matriz não singular tal que $A^2 = A$, então $\det(A) = 1$;
    (e) Se $A = A^{-1}$, então $\det(A) = \pm 1$.

22. Diga, justificando, se cada uma das afirmações seguintes é verdadeira ou falsa.
    (a) $\det(-A) = -\det(A)$;
    (b) Se $A^T = A^{-1}$, então $\det(A) = 1$;
    (c) Se $\det(A) = 0$, então $A = O$;
    (d) Se $\det(A) = 7$, então o sistema $AX = 0$ tem apenas a solução trivial;
    (e) Se $A^2 = A$ e $A \neq I_n$, então $\det(A) = 0$;
    (f) Se $\det(AB) = 0$, então $\det(A) = 0$ ou $\det(B) = 0$;
    (g) Se $AB \neq BA$ então $\det(AB) \neq \det(BA)$.

1. (a) 1; (b) -3; (c) 1; (d) -43; (e) 3.

3. (a) 3; (b) -15; (c) 81; (d) $-\frac{1}{5}$; (e) 96; (f) $\frac{32}{3}$; (g) $\frac{1}{96}$; (h) $-\frac{9}{5}$.

4. ($\det(A) = -8$ e $\det(B) = -4$) ou ($\det(A) = 8$ e $\det(B) = 4$).

6. (a) -3; (b) -10; (c) 16; (d) 3; (e) 5.

7. $\det(B) = 4$.

8. (a) -13; (b) 37; (c) 1496; (d) -8; (e) 0.

9. (a) $\det(A) = -3$; (b) por exemplo, $B = \begin{bmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ -4 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ ou $B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 4 \\ -2 & 1 & 1 \end{bmatrix}$;
   (c) $\operatorname{adj} A = \begin{bmatrix} -1 & -1 & 1 \\ -4 & -1 & -2 \\ 2 & -1 & 1 \end{bmatrix}$; (d) $A^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \\ \frac{4}{3} & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \end{bmatrix}$.

10. (a) $\begin{bmatrix} \frac{1}{3} & -\frac{4}{15} & -\frac{11}{60} \\ 0 & \frac{1}{5} & \frac{1}{5} \\ 0 & 0 & \frac{1}{4} \end{bmatrix}$; (b) $\begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 \\ -\frac{1}{5} & -\frac{4}{5} & \frac{7}{5} \\ \frac{1}{10} & \frac{2}{5} & -\frac{1}{5} \end{bmatrix}$; (c) $\begin{bmatrix} 3 & -\frac{39}{17} & 2 & -\frac{16}{17} \\ 0 & \frac{2}{17} & 0 & \frac{3}{17} \\ -1 & \frac{21}{17} & -1 & \frac{6}{17} \\ 0 & \frac{5}{17} & 0 & -\frac{1}{17} \end{bmatrix}$; (d) $\begin{bmatrix} \frac{1}{a} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{b} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{c} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{d} \end{bmatrix}$.

11. (a) $\det(A) = 2$; (b) o elemento $(2,3)$ de $\operatorname{adj} A$ é 2 e o elemento $(2,3)$ de A^{-1} é 1

12. (a) $\det(A) = -8a - 4$; (b) $a = -\frac{1}{2}$; (c) o elemento (1,2) de A^{-1} é $-\frac{1}{2}$.

13. $\beta \in \mathbb{R} \setminus \{-2 - \sqrt{10}, 0, -2 + \sqrt{10}\}$.

15. $\operatorname{adj} A = \begin{bmatrix} 4 & -2 \\ -3 & 1 \end{bmatrix}$; $A\,(\operatorname{adj} A) = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}$; $\det(A) = -2$.

16. Se A é uma matriz quadrada e $\det(A) \neq 0$.

17. (a) $x = -2$, $y = 1$, $z = -3$; (b) $x = -\frac{28}{11}$, $y = -\frac{34}{11}$, $z = -\frac{30}{11}$; (c) $x = 1$, $y = -1$, $z = 0$, $w = 2$.

18. (a) 13 (b) 2

19. $a \in \{-1, 0\}$.

20. Se $\det(A) \neq 0$, então A é invertível e $AB = AC \Rightarrow A^{-1}(AB) = A^{-1}(AC) \Rightarrow (A^{-1}A)B = (A^{-1}A)C \Rightarrow B = C$.

22. (a) falsa; (b) falsa; (c) falsa; (d) verdadeira; (e) verdadeira; (f) verdadeira; (g) falsa;