Álgebra Linear e Geometria Analítica — Agrup. IV

3.ª ***Prova de Avaliação Discreta; 9 de janeiro de 2019***

Duração: **1h30min**

– Justifique todas as respostas e indique os cálculos efetuados –

Nas questões, que se seguem, considere (sempre) que $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$.

Em cada uma das questões, pode (e deve) evocar informação proveniente de questões anteriores do enunciado e não serão consideradas como válidas respostas que se baseiem em informação retirada do enunciado das questões seguintes.

[15pts] 1. Usando a definição de valor/vetor próprio (sem identificar explicitamente o subespaço próprio), mostre que $(-1, 2, 1)$ é um vetor próprio de A associado ao valor próprio 3.

[25pts] 2. Calcule os restantes valores próprios de A e justifique que A é diagonalizável.

[35pts] 3. Mostre que a matriz $P = \begin{bmatrix} -\frac{\sqrt{6}}{6} & \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{3}}{3} \\ \frac{\sqrt{6}}{3} & 0 & \frac{\sqrt{3}}{3} \\ \frac{\sqrt{6}}{6} & \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{3} \end{bmatrix}$ diagonaliza ortogonalmente A e, determine, justificando, a respetiva matriz diagonal semelhante a A.

4. Considere a quádrica de equação matricial $X^TAX + BX = 0$, onde A é a matriz dada no início do enunciado e $B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

[30pts] (a) Identifique e aplique uma mudança de variável na equação matricial de modo a que a seguinte equação:

$$3\hat{x}^2 + \hat{y}^2 + \sqrt{2}\hat{y} = 0$$

passe a representar a quádrica para a nova variável $\hat{X} = \begin{bmatrix} \hat{x} \\ \hat{y} \\ \hat{z} \end{bmatrix}$. Justifique com detalhe.

[25pts] (b) A partir da equação anterior obtenha uma equação reduzida da quádrica e classifique-a.

5. Seja $\phi \colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ a aplicação linear cuja matriz representativa para a base canónica de $\mathbb{R}^3$ é A.

[15pts] (a) Determine $\phi(x, y, z)$, para $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, arbitrário.

[20pts] (b) Determine o núcleo de ϕ e indique a sua dimensão.

[15pts] (c) ϕ é um isomorfismo? Justifique.

[20pts] (d) Determine a matriz representativa de ϕ relativa à base $\mathcal{B} = \left((1, 1, -1), \left(\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2}\right), (-1, 2, 1)\right)$.