Departamento de Matemática, Universidade de Aveiro — Matemática Discreta

Exame final, 14 de Junho de 2023, Duração: **2h30m** **B** Classificação: ______

Nome: Exemplo de resolução Nº Mec.: ______

Declaro que desisto: ______ Folhas supl.: ______

3. (2 val) Considere um conjunto A de 30 números inteiros positivos de 7 dígitos. Mostre que existem dois subconjuntos diferentes e não vazios X e Y de A tal que a soma dos elementos de X é igual à soma dos elementos de Y.

   Sugestão. $30 \cdot 10^7 < 2^{30} - 1$.

4. (5 val) Um hotel tem 20 quartos que vão ser pintados usando 5 cores. Cada quarto é pintado com uma única cor e existe tinta de cada cor suficiente para pintar todos os quartos.

   a) De quantas maneiras podemos pintar os quartos, tendo em conta que os quartos são indistinguíveis.

   b) Determine o número de possibilidades de pintar os quartos, considerando que são numerados.

   c) Considere, agora, que só tem tinta azul (uma das cinco cores) para pintar três quartos e o mesmo acontece relativamente à tinta verde, continuando a ter tinta suficiente de cada uma das restantes três cores para pintar todos os quartos.

      i. Determine a série geradora correspondente ao problema de determinação do número de possibilidades de pintar n quartos com as cinco cores.

      ii. A partir da série geradora obtida em (4(c)i) obtenha o valor do coeficiente que dá a solução do problema para os 20 quartos.

Coincide com 1 a) b) do Teste 2.

---

3. Como $|A| = 30$, o número de subconjuntos de A é 2^{30}, retirando o conjunto vazio tem-se $2^{30}-1$ subconjuntos possíveis (pombos/objetos) para afetar as somas possíveis.
Sendo $p \in A$ um inteiro positivo de 7 dígitos, tem-se $p \in \{1, 2, \ldots, 9999999\}$, pelo que, escolhendo 30 números em A a soma máxima é menor que $30 \times 10^7 < 2^{30} - 1$.
Ou seja, o número de subconjuntos é superior ao número de somas possíveis (gaiolas/caixas), donde, pelo princípio das gaiolas dos pombos haverá pelo menos dois subconjuntos não vazios X e Y de A, tal que os seus elementos têm igual soma:
$x_1 + x_2 + \cdots + x_k = y_1 + y_2 + \cdots + y_j$, $x_k \in X$, $y_j \in Y$, $k, j \in \mathbb{N}$.

4. (a) Temos 20 quartos indistinguíveis (bolas iguais) para afetar 5 cores (caixas), por exemplo:

$$
\begin{array}{lccccccr}
 & \overbrace{\quad}^{c_1} & \overbrace{\quad}^{c_2} & \overbrace{\quad}^{c_3} & \overbrace{\quad}^{c_4} & \overbrace{\quad}^{c_5} & \\
20q \to & qq & qqqq & qqqqqq & qqqqq & qqq & (1) \\
\text{ou} & - & qqqqqq & qqqqqq & qqqqqqqq & - & (2)
\end{array}
$$

respetivamente, combinações com repetição de 5 elementos (cores) tomadas 20 a 20:

(1) $\{c_1, c_1, c_2, c_2, c_2, c_2, c_3, c_3, c_3, c_3, c_3, c_3, c_4, c_4, c_4, c_4, c_4, c_5, c_5, c_5\}$

ou (2) $\{c_2, c_2, c_2, c_2, c_2, c_2, c_3, c_3, c_3, c_3, c_3, c_3, c_4, c_4, c_4, c_4, c_4, c_4, c_4, c_4\}$

Donde, a solução é dada por $\left(\!\binom{5}{20}\!\right) = \binom{5+20-1}{20} = \binom{24}{20}$

$= \binom{24}{4} = \dfrac{24!}{4!\,20!}$

(b) Sendo os quartos numerados, tem-se $q_1, q_2, q_3, \ldots, q_{19}, q_{20}$, podendo cada um deles ser pintado de uma cor a escolher entre as 5:

$$\underset{q_1}{5} \times \underset{q_2}{5} \times \underset{q_3}{5} \times \cdots \times \underset{q_{19}}{5} \times \underset{q_{20}}{5} = 5^{20},$$

isto é, a solução é dada por arranjos com repetição de 5 elementos (cores) 20 a 20, sendo o número de tais arranjos 5^{20} (aplicando-se o princípio da multiplicação).