Departamento de Matemática, Universidade de Aveiro
Álgebra Linear e Geometria Analítica — Agrup. IV
Exame Final; 9 de janeiro de 2019
Duração: **2h30min**

– Justifique todas as respostas e indique os cálculos efetuados –

1. Considere as matrizes reais $E = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 & -1 \end{bmatrix}$ e $F = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ -2 \end{bmatrix}$.

[15pts] (a) Determine a caraterística e a nulidade de E. Identifique, justificando, o espaço das colunas de E.

[10pts] (b) Classifique o sistema $EX = F$, sem o resolver.

[35pts] (c) Sejam $X_1 = (0,1,0)$, $X_2 = (1,0,2)$, $X_3 = (1,1,2)$, $X_4 = (1,1,-1)$ as colunas de E.

i. Escreva, justificando, uma base ordenada $\mathcal{B}$ de $\mathbb{R}^3$ que esteja contida em $\{X_1, X_2, X_3, X_4\}$.

ii. Calcule a matriz de mudança de base de $\mathcal{B}$ para a base $\mathcal{T} = ((1,0,0),(1,0,1),(0,-1,0))$.

iii. Determine o vetor das coordenadas na base $\mathcal{T}$ do vetor Y, sabendo que $[Y]_{\mathcal{B}} = F$.

2. Considere o plano $\mathcal{P}$ de equação $x - y + 2z = 3$ e o ponto $A(1,2,3)$.

[10pts] (a) Determine uma equação vetorial da reta $\mathcal{R}$ ortogonal ao plano que contém o ponto A.

[10pts] (b) Determine o ponto B do plano $\mathcal{P}$ mais próximo de A.

[15pts] (c) Calcule a distância do ponto A ao plano $\mathcal{P}$.

3. Seja $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$.

Em cada alínea, das cinco que se seguem, pode (e deve) evocar informação proveniente de alíneas anteriores da questão e não serão consideradas como válidas respostas que se baseiem em informação retirada do enunciado de alíneas seguintes.

[10pts] (a) Usando a definição de valor/vetor próprio (sem identificar explicitamente o subespaço próprio), mostre que$(-1,2,1)$ é um vetor próprio de A associado ao valor próprio 3.

[15pts] (b) Calcule os restantes valores próprios de A e justifique que A é diagonalizável.

[20pts] (c) Mostre que a matriz $P = \begin{bmatrix} -\frac{\sqrt{6}}{6} & \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{3}}{3} \\ \frac{\sqrt{6}}{3} & 0 & \frac{\sqrt{3}}{3} \\ \frac{\sqrt{6}}{6} & \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{3} \end{bmatrix}$ diagonaliza ortogonalmente A e, determine, justificando, a respetiva matriz diagonal semelhante a A.

[20pts] (d) Considere a quádrica de equação matricial $X^T AX + BX = 0$, com $B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

i. Identifique e aplique uma mudança de variável na equação matricial de modo a que a seguinte equação:

$$3\hat{x}^2 + \hat{y}^2 + \sqrt{2}\hat{y} = 0$$

passe a representar a quádrica para a nova variável $\hat{X} = \begin{bmatrix} \hat{x} \\ \hat{y} \\ \hat{z} \end{bmatrix}$. Justifique com detalhe.

ii. A partir da equação anterior obtenha uma equação reduzida da quádrica e classifique-a.

[25pts] (e) Seja $\phi\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ a aplicação linear cuja matriz representativa para a base canónica de $\mathbb{R}^3$ é A.

i. Determine $\phi(x,y,z)$, para $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$, arbitrário.

ii. Determine uma base do núcleo de ϕ e indique a sua dimensão.

[15pts] 4. Diga se é verdadeira ou falsa a seguinte afirmação, justificando com detalhe:

$$\mathcal{S} = \{A \in \mathbb{R}^{n\times n}\colon A^T = -A\} \text{ é subespaço vetorial do espaço vetorial } \mathbb{R}^{n\times n}.$$