Universidade de Aveiro
Departamento de Matemática

Cálculo II - Agrupamento 4 **2022/23**

Folha 5: *Transformadas de Laplace e aplicações às EDO*

---

1. Para cada uma das funções seguintes, determine $F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\}$:

   (a) $f(t) = 2\,\mathrm{sen}\,(3t) + t - 5e^{-t}$;
   (b) $f(t) = e^{2t}\cos(5t)$;
   (c) $f(t) = te^{3t}$;
   (d) $f(t) = \pi - 5e^{-t}t^{10}$;
   (e) $f(t) = (3t-1)\,\mathrm{sen}\,t$;
   (f) $f(t) = (1 - H_\pi(t))\,\mathrm{sen}\,t$;
   (g) $f(t) = (t-2)^2e^{2(t-2)}H_2(t)$.

2. Para cada uma das funções seguintes, determine $\mathcal{L}^{-1}\{F(s)\}$:

   (a) $F(s) = \dfrac{2s}{s^2-9}$; (b) $F(s) = \dfrac{4}{s^7}$; (c) $F(s) = \dfrac{1}{s^2+6s+9}$;
   (d) $F(s) = \dfrac{1}{s^2+s-2}$; (e) $F(s) = \dfrac{1}{s^2+4s+6}$; (f) $F(s) = \dfrac{3s-1}{s^2-4s+13}$;
   (g) $F(s) = \dfrac{4s+e^{-s}}{s^2+s-2}$; (h) $F(s) = \dfrac{s}{(s^2+4)^2}$.

3. Calcule o valor dos seguintes integrais impróprios, usando transformadas de Laplace:
   (a) $\displaystyle\int_0^{+\infty} t^{10}\,e^{-2t}dt$; (b) $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-3t}t\,\mathrm{sen}\,t\,dt$.

4. Seja $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ uma função diferenciável. Sabendo que $f'(t) + 2f(t) = e^t$ e que $f(0) = 2$, determine a expressão de $f(t)$.

5. Calcule:

   (a) $\mathcal{L}\{(t-2+e^{-2t})\cos(4t)\}$;
   (b) $\mathcal{L}^{-1}\left\{\dfrac{2s-1}{s^2-4s+6}\right\}$;
   (c) $\mathcal{L}^{-1}\left\{\dfrac{2s}{(s-1)(s^2+2s+5)}\right\}$.

6. Usando transformadas de Laplace mostre que

$$t^m * t^n = \frac{m!\,n!}{(m+n+1)!}\,t^{m+n+1} \qquad (m,n\in\mathbb{N}_0).$$

7. Determine a solução da equação

$$y'(t) = 1 - \mathrm{sen}\,t - \int_0^t y(\tau)\,d\tau$$

   que satisfaz a condição $y(0) = 0$.

8. Resolva cada um dos seguintes problemas de Cauchy usando transformadas de Laplace.

   (a) $3x' - x = \cos t\,, \qquad x(0) = -1;$

   (b) $\dfrac{d^2y}{dt^2} + 36y = 0\,, \qquad y(0) = -1\,, \quad \dfrac{dy}{dt}(0) = 2;$

   (c) $y'' + 2y' + 3y = 3t\,, \qquad y(0) = 0\,, \quad y'(0) = 1;$

   (d) $y''' + 2y'' + y' = x\,, \qquad y(0) = y'(0) = y''(0) - 1 = 0;$

   (e) $y'' + y' = \dfrac{e^{-t}}{2}\,, \qquad y(0) = 0 = y'(0).$

9. Resolva o seguinte problema de valores iniciais recorrendo às transformadas de Laplace:

$$y'' + y = t^2 + 1\,, \qquad y(\pi) = \pi^2\,, \quad y'(\pi) = 2\pi.$$

   (Sugestão: Efetuar a substituição definida por $x = t - \pi$).

10. Usando transformadas de Laplace, resolva o seguinte sistema de EDOs sujeito às condições indicadas (onde x e y são funções da variável independente t):

$$\begin{cases} x' = 2x - 2y \\ y' = -3x + y \end{cases}, \qquad x(0) = 5, \quad y(0) = 0.$$