Álgebra Linear e Geometria Analítica — Agrup. IV

3.ª *Prova de Avaliação Discreta; 17 de janeiro de 2018*

Duração: **1h40min**

– Justifique todas as respostas e indique os cálculos efetuados –

1. Seja $\mathcal{P}$ o plano que contém os pontos $A(1,2,1)$, $B(0,0,3)$ e $C(1,-1,1)$.

[15pts] (a) Determine uma equação cartesiana do plano $\mathcal{P}$.

[10pts] (b) Determine uma equação vetorial da reta perpendicular ao plano $\mathcal{P}$ que passa em $Q(1,2,3)$.

[15pts] (c) Calcule a distância do ponto Q ao plano $\mathcal{P}$.

2. Considere em $\mathbb{R}^3$ seguintes vetores:
$X_1 = (1,0,2)\,,\ X_2 = (0,1,0)\,,\ X_3 = (1,0,-1)\,,\ X_4 = (-2,3,2)\,.$

[30pts] (a) Mostre que $\mathcal{B} = (X_1, X_2, X_3)$ é uma base de $\mathbb{R}^3$ e calcule a matriz de mudança de base da base canónica de $\mathbb{R}^3$ para $\mathcal{B}$, $M_{\mathcal{B}\leftarrow\mathcal{C}}$.

[15pts] (b) Calcule as coordenadas de X_4 na base $\mathcal{B}$.

[40pts] (c) Seja $\mathcal{V} = \langle X_2, X_3, X_4\rangle$.

i. Determine uma base de $\mathcal{V}$ que contenha o vetor X_2 e que seja ortonormada.

ii. Verifique se o vetor $X = (1,0,0)$ pertence a $\mathcal{V}$.

iii. Determine a projeção ortogonal de $X = (1,0,0)$ sobre $\mathcal{V}$.

3. Sejam $\mathcal{P}_2$ e $\mathcal{P}_1$ os espaços vetoriais dos polinómios de coeficientes reais de grau menor ou igual a 2 e de grau menor ou igual a 1, respetivamente. Considere a aplicação linear $\phi\colon \mathcal{P}_2 \to \mathcal{P}_1$ tal que

$$\phi(at^2 + bt + c) = (c-b)t + (c-a)\,.$$

[15pts] (a) Determine o núcleo de ϕ, identifique uma sua base e indique a sua dimensão.

[10pts] (b) Indique a dimensão da imagem de ϕ (sem determinar a imagem) e diga se ϕ é sobrejetiva.

[15pts] (c) Determine a matriz representativa de ϕ para as bases $\mathcal{S} = (t^2, t^2+3, t^2+t+1)$ de $\mathcal{P}_2$ e $\mathcal{C} = (t,1)$ base canónica de $\mathcal{P}_1$.

[10pts] (d) Seja $p(t) \in \mathcal{P}_2$ tal que o seu vetor das coordenadas na base $\mathcal{S}$ é $[p(t)]_{\mathcal{S}} = \begin{bmatrix} 5 \\ 4 \\ -3 \end{bmatrix}$.

Calcule $\phi\,(p(t))$.

[25pts] 4. Obtenha uma equação reduzida da quádrica de equação $x^2+y^2+4x+2y-z+1=0$ e classifique-a.