

Nome:

n^o de estudante:

Declaro que desisto:

Departamento de Matemática da Universidade de Aveiro

Cálculo I - agr. 4

2021/22

2^o teste

Duração: 1h40

- Este exame contém **4 questões** no total, com uma questão por folha. O enunciado do exame contém no total 5 folhas numeradas de 0 até 4. Na página inicial (esta página, pág. 0) encontra também a cotação e formulários.
- Cada pergunta deve ser respondida na **respetiva folha do enunciado** — começa na frente e, se necessário, continua no verso. Se for preciso podes ainda continuar em folhas de continuação mas tens de dizer qual é a questão a que estás a continuar a responder.
- **Não podes misturar respostas a diferentes perguntas** na mesma folha. Por exemplo, não podes responder a parte da pergunta 2 na mesma folha da questão 1, e vice-versa.
- Deves identificar todas as folhas que usares com o teu **nome e n^o de estudante**. Deves indicar no enunciado de cada pergunta **quantas folhas de continuação** usaste para essa pergunta.
- Todos os raciocínios devem ser convenientemente **justificados** e todas as respostas devem ser **cuidadosamente redigidas**.

Cotação:

1. 6; 2. 6; 3. 5; 4. 3.

Algumas fórmulas de derivação

função de x	$\frac{d}{dx}$
$mu(x)$, $m \in \mathbb{R}$	$mu'(x)$
$u(x)^n$, $n \in \mathbb{R}$	$nu(x)^{n-1}u'(x)$
$\log_a u(x) $, $a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\}$	$\frac{u'(x)}{u(x) \ln a}$
$a^{u(x)}$, $a \in \mathbb{R}^+$	$a^{u(x)}u'(x) \ln a$
$\sin u(x)$	$\cos u(x)u'(x)$
$\cos u(x)$	$-\sin u(x)u'(x)$
$\tan u(x)$	$\sec^2 u(x)u'(x)$
$\cotan u(x)$	$-\csc^2 u(x)u'(x)$
$\sec u(x)$	$\tan u(x) \sec u(x)u'(x)$
$\csc u(x)$	$-\cotan u(x) \csc u(x)u'(x)$
$\sinh u(x)$	$\cosh u(x)u'(x)$
$\cosh u(x)$	$\sinh u(x)u'(x)$
$\arcsin u(x)$	$\frac{u'(x)}{\sqrt{1-u(x)^2}}$
$\arccos u(x)$	$-\frac{u'(x)}{\sqrt{1-u(x)^2}}$
$\arctan u(x)$	$\frac{u'(x)}{1+u(x)^2}$
$\operatorname{arccot} u(x)$	$-\frac{u'(x)}{1+u(x)^2}$

Algumas fórmulas trigonométricas

$\sec u = \frac{1}{\cos u}$	$\csc u = \frac{1}{\sin u}$
$\cot u = \frac{\cos u}{\sin u}$	
$\cos^2 u = \frac{1+\cos(2u)}{2}$	$\sin^2 u = \frac{1-\cos(2u)}{2}$
$1 + \tan^2 u = \sec^2 u$	$1 + \cotan^2 u = \csc^2 u$
$\cos^2(\arcsin u) = 1 - u^2$	$\sin^2(\arccos u) = 1 - u^2$

Algumas fórmulas hiperbólicas

$\sinh u = \frac{e^u - e^{-u}}{2}$	$\cosh u = \frac{e^u + e^{-u}}{2}$
$\cosh^2 u - \sinh^2 u = 1$	

Nome:

n^o de estudante:

N^o folhas de continuação: (Questão 1).

1. Seja \mathcal{A} a região do plano delimitada pelos gráficos das funções $y = \frac{2}{\sqrt{x}}$ e $y = \sqrt{5-x}$.

(a) Calcula os pontos de interseção dos gráficos de $y = \frac{2}{\sqrt{x}}$ e de $y = \sqrt{5-x}$.

Nota: Para efeitos da resolução das alíneas seguintes informa-se que a solução é $(1, 2)$ e $(4, 1)$, mas nenhuma cotação terá na presente alínea se apenas verificares que estes pontos satisfazem as duas equações.

(b) Representa geometricamente a região \mathcal{A} .

(c) Calcula a área da região \mathcal{A} .

Resposta à questão 1:

Nome:

n^o de estudante:

N^o folhas de continuação: (Questão 2).

2. (a) Considera os seguintes integrais impróprios. Determina a natureza de cada um e, no caso de convergência, o seu valor.

(i) $\int_{-\infty}^{-1} \frac{e^x}{\sqrt{1-e^{2x}}} dx$; (ii) $\int_1^e \frac{1}{x \ln x} dx$.

- (b) Determina a soma da seguinte série numérica convergente:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \left[(-1)^n \frac{3^n}{e^{2n+1}} + \frac{1}{e^{1/n}} - \frac{1}{e^{1/(n+1)}} \right].$$

Resposta à questão 2:

Nome:

n^o de estudante:

N^o folhas de continuação: (Questão 3).

3. Estuda a natureza das seguintes séries numéricas. Em caso de convergência indica se é simples ou absoluta.

(a) $\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{n^3}{\sqrt{3^n}}$; (b) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{ne^{1/n} + \sin n}{4n^2 - n - 2}$.

Resposta à questão 3:

Nome:

n^o de estudante:

N^o folhas de continuação: (Questão 4).

4. Considera a função

$$g(x) := 2x - 1 - \frac{1}{2} \int_0^x e^{-t^2} dt, \quad x \in \mathbb{R}.$$

- (a) Determina a sua derivada.
- (b) Mostra que a equação $g(x) = 0$ tem uma e uma só solução em \mathbb{R} .

Resposta à questão 4: