CÁLCULO II - Agrupamento 4

27 de junho de 2022

Exame Final

Duração: 2h30

A prova é composta por 7 questões. O formulário encontra-se no verso.
Justifique todas as respostas de forma clara e concisa.

1. [**30**] Determine o raio e o domínio de convergência da série de potências $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2x-1)^n}{\sqrt{n}}$, indicando os pontos onde a convergência é simples ou absoluta.

2. [**30**] Considere a função *raiz cúbica* $f(x) = \sqrt[3]{x},\ x \in \mathbb{R}$.
   (a) Escreva a fórmula de Taylor de segunda ordem da função f no ponto 1 (com resto de Lagrange).
   (b) Mostre que o erro absoluto cometido ao aproximar $f(x)$ pelo polinómio de Taylor de ordem 2 no ponto 1, no intervalo $[1, \frac{3}{2}]$, é inferior a 10^{-2}.

3. [**30**] Considere a função f definida em $[0, \pi]$ por $f(x) = x$.
   (a) Determine a série de Fourier de senos de f.
   (b) Represente graficamente a soma da série obtida na alínea anterior no intervalo $[-2\pi, 2\pi]$.

4. [**20**] Determine e classifique os pontos críticos da função $f(x, y) = y^4 - y^2 - 2xy + x^2$.

5. [**30**] Resolva as seguinte equações diferenciais:
   (a) $y' = (1 + y^2)\cos t$;
   (b) $x^2y' + 2xy = y^3, \quad x > 0.$ (Sugestão: efetue a mudança de variável $z = y^{-2}$)

6. [**45**] Considere o seguinte problema de valores iniciais (PVI):
$$y'' + 3y' + 2y = e^{-2t}, \quad y(0) = 0 = y'(0).$$
   (a) Determine a solução do PVI começando por resolver a equação diferencial. (Sugestão: use o método dos coeficientes indeterminados)
   (b) Resolva o mesmo PVI usando agora transformadas de Laplace.

7. [**15**] Considere a equação diferencial linear (de coeficientes variáveis)
$$x^2y''(x) + ax\,y'(x) + b\,y(x) = x\ln x, \quad x > 0, \tag{1}$$
onde a, b são duas constantes reais.
Mostre que, dada uma qualquer solução $y(x)$ da equação (1), a função $z(t) = y(e^t)$ é solução da equação diferencial linear de coeficientes constantes
$$z''(t) + (a-1)z'(t) + bz(t) = t\,e^t, \quad t \in \mathbb{R}.$$

FORMULÁRIO

Algumas fórmulas de derivação

$(f\,g)' = f'g + f\,g'$	$\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - f\,g'}{g^2}$
$(k\,f)' = k\,f' \qquad (k \in \mathbb{R})$	$(f^\alpha)' = \alpha\, f^{\alpha-1} f' \qquad (\alpha \in \mathbb{R})$
$(a^f)' = f'\,a^f\, \ln a \qquad (a \in \mathbb{R}^+)$	$(\log_a f)' = \frac{f'}{f\,\ln a} \qquad (a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\})$
$(\operatorname{sen} f)' = f'\,\cos f$	$(\cos f)' = -f'\,\operatorname{sen} f$
$(\operatorname{tg} f)' = f'\,\sec^2 f = \frac{f'}{\cos^2 f}$	$(\operatorname{cotg} f)' = -f'\operatorname{cosec}^2 f = -\frac{f'}{\operatorname{sen}^2 f}$
$(\operatorname{arcsen} f)' = \frac{f'}{\sqrt{1-f^2}}$	$(\arccos f)' = -\frac{f'}{\sqrt{1-f^2}}$
$(\operatorname{arctg} f)' = \frac{f'}{1+f^2}$	$(\operatorname{arccotg} f)' = -\frac{f'}{1+f^2}$

Integração por partes: $\displaystyle\int f'g = f\,g - \int f\,g'$

Alguns desenvolvimentos em série de MacLaurin

- $\displaystyle \frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n = 1 + x + x^2 + \cdots + x^n + \cdots, \quad x \in]-1,1[$
- $\displaystyle e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \cdots, \quad x \in \mathbb{R}$
- $\displaystyle \operatorname{sen} x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} = x - \frac{x^3}{3!} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \cdots, \quad x \in \mathbb{R}$
- $\displaystyle \cos x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} = 1 - \frac{x^2}{2!} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + \cdots, \quad x \in \mathbb{R}.$

Algumas transformadas de Laplace

$$F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\}(s), \quad s > s_f$$

função	transformada
$t^n \quad (n \in \mathbb{N}_0)$	$\frac{n!}{s^{n+1}}\,,\ s > 0$
$e^{at} \quad (a \in \mathbb{R})$	$\frac{1}{s-a}\,,\ s > a$
$\operatorname{sen}(at) \quad (a \in \mathbb{R})$	$\frac{a}{s^2+a^2}\,,\ s > 0$
$\cos(at) \quad (a \in \mathbb{R})$	$\frac{s}{s^2+a^2}\,,\ s > 0$
$\operatorname{senh}(at) \quad (a \in \mathbb{R})$	$\frac{a}{s^2-a^2}\,,\ s > \|a\|$
$\cosh(at) \quad (a \in \mathbb{R})$	$\frac{s}{s^2-a^2}\,,\ s > \|a\|$

função	transformada
$e^{\lambda t} f(t) \quad (\lambda \in \mathbb{R})$	$F(s-\lambda)$
$H_a(t) f(t-a) \quad (a > 0)$	$e^{-as} F(s)$
$f(at) \quad (a > 0)$	$\frac{1}{a}\, F\left(\frac{s}{a}\right)$
$t^n f(t) \quad (n \in \mathbb{N})$	$(-1)^n F^{(n)}(s)$
$f'(t) \quad (n \in \mathbb{N})$	$sF(s) - f(0)$
$f''(t) \quad (n \in \mathbb{N})$	$s^2 F(s) - sf(0) - f'(0)$
$f^{(n)}(t) \quad (n \in \mathbb{N})$	$s^n F(s) - \sum_{k=1}^{n} s^{n-k} f^{(k-1)}(0)$