

Aplicações lineares

1. Averigue se são aplicações lineares as funções definidas por

- (a) $\phi(x, y) = (x + 1, y, x + y)$; (b) $\phi(x, y, z) = (x + y, y, x - z)$;
 (c) $\phi(x, y, z) = (x + y, 0, 2x - z)$; (d) $\phi(x, y, z) = (x - y, x^2, 2z)$;
 (e) $\phi(at^2 + bt + c) = at + b + 1$; (f) $\phi(at^2 + bt + c) = a + (t + 1)(bt + c)$.

2. Seja $\phi: \mathbb{R}^{n \times n} \rightarrow \mathbb{R}^{n \times n}$ definida por

$$\phi(A) = \begin{cases} A^{-1} & \text{se } A \text{ não é singular} \\ 0 & \text{se } A \text{ é singular} \end{cases}$$

para $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$. Averigue se ϕ é uma aplicação linear.

3. Dada uma matriz A $n \times n$, defina-se $\phi: \mathbb{R}^{n \times n} \rightarrow \mathbb{R}^{n \times n}$ por $\phi(B) = AB - BA$ para $B \in \mathbb{R}^{n \times n}$. Averigue se ϕ é uma aplicação linear.

4. Seja $\phi: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ uma aplicação linear, satisfazendo $\phi(1, 1) = (2, -3)$ e $\phi(0, 1) = (1, 2)$. Determine

- (a) $\phi(3, -2)$; (b) $\phi(a, b)$.

5. Seja $\phi: \mathcal{P}_2 \rightarrow \mathcal{P}_3$ uma aplicação linear tal que $\phi(1) = 1$, $\phi(t) = t^2$ e $\phi(t^2) = t^3 + t$. Determine

- (a) $\phi(2t^2 - 5t + 3)$; (b) $\phi(at^2 + bt + c)$.

Matriz de uma aplicação linear

6. Seja $\phi: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ uma aplicação linear definida por

$$\phi(x, y, z) = (x + 2y + z, 2x - y, 2y + z).$$

Seja \mathcal{C} a base canónica de \mathbb{R}^3 e $\mathcal{B} = ((1, 0, 1), (0, 1, 1), (0, 0, 1))$ uma base de \mathbb{R}^3 . Determine a matriz representativa de ϕ relativamente

- (a) à base \mathcal{C} ; (b) às bases \mathcal{C} e \mathcal{B} ; (c) às bases \mathcal{B} e \mathcal{C} ; (d) à base \mathcal{B} ;

e determine $\phi(1, 1, -2)$ usando cada uma das matrizes obtidas em (a)–(d).

7. Seja $\phi: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ uma aplicação linear definida por

$$\phi\left(\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}.$$

Sejam $\mathcal{S} = \left(\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}\right)$ e $\mathcal{T} = \left(\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}\right)$ bases de \mathbb{R}^2 e \mathbb{R}^3 , respetivamente.

- (a) Determine a matriz representativa de ϕ relativamente às bases canónicas de \mathbb{R}^2 e \mathbb{R}^3 .
 (b) Determine a matriz representativa de ϕ relativamente às bases \mathcal{S} e \mathcal{T} .
 (c) Determine $\phi\left(\begin{bmatrix} 2 \\ -3 \end{bmatrix}\right)$, usando cada uma das matrizes obtidas anteriormente.

8. Seja $\phi : \mathcal{P}_2 \rightarrow \mathcal{P}_2$ uma aplicação linear definida por

$$\phi(at^2 + bt + c) = (a + 2c)t^2 + (b - c)t + (a - c)$$

e sejam $\mathcal{S} = (t^2, t, 1)$ e $\mathcal{T} = (t^2 - 1, t, t - 1)$ bases de \mathcal{P}_2 .

- (a) Encontre a matriz representativa de ϕ relativamente às bases \mathcal{S} e \mathcal{T} .
- (b) Determine $\phi(2t^2 - 3t + 1)$ usando a alínea anterior.

9. Dada a matriz C $n \times n$, considere-se $\phi : \mathbb{R}^{n \times n} \rightarrow \mathbb{R}^{n \times n}$ definida por $\phi(A) = CA$ para $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$.

(a) Mostre que ϕ é uma aplicação linear.

(b) Considerando $n = 2$, sejam $C = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$, $\mathcal{S} = \left(\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right)$ uma base de $\mathbb{R}^{2 \times 2}$ e \mathcal{C} a base canónica de $\mathbb{R}^{2 \times 2}$. Determine a matriz representativa de ϕ relativamente

- i. à base \mathcal{C} ;
- ii. às bases \mathcal{C} e \mathcal{S} ;
- iii. às bases \mathcal{S} e \mathcal{C} ;
- iv. à base \mathcal{S} .

10. Sejam $X_1 = t + 1$, $X_2 = t - 1$, $Y_1 = t^2 + 1$, $Y_2 = t$, $Y_3 = t - 1$ e $\phi : \mathcal{P}_1 \rightarrow \mathcal{P}_2$ a aplicação linear tal que

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \\ -1 & -2 \end{bmatrix}$$

é a matriz que representa ϕ relativamente às bases $\mathcal{S} = (X_1, X_2)$ e $\mathcal{T} = (Y_1, Y_2, Y_3)$. Determine

- (a) os vetores das coordenadas de $\phi(X_1)$ e $\phi(X_2)$ na base \mathcal{T} ;
- (b) $\phi(X_1)$ e $\phi(X_2)$;
- (c) $\phi(2t + 1)$;
- (d) $\phi(at + b)$.

11. Determine a matriz representativa da aplicação linear $\phi : \mathcal{P}_3 \rightarrow \mathcal{P}_3$ definida por $\phi(p(t)) = p''(t) + p(0)$ relativamente à

- (a) base canónica de \mathcal{P}_3 ;
- (b) base $\mathcal{T} = (t^3, t^2 - 1, t, 1)$ de \mathcal{P}_3 .

12. Se $\text{id}_{\mathcal{V}} : \mathcal{V} \rightarrow \mathcal{V}$ é a aplicação identidade definida por $\text{id}_{\mathcal{V}}(X) = X$ para qualquer $X \in \mathcal{V}$, mostre que a matriz de $\text{id}_{\mathcal{V}}$ relativamente a qualquer base de \mathcal{V} é a matriz identidade I_n com $n = \dim \mathcal{V}$.

Núcleo e imagem de uma aplicação linear

13. Seja $\phi : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^3$ uma aplicação linear definida por $\phi(x, y, z, w) = (x + y, z + w, x + z)$.

- (a) Determine o núcleo e a imagem de ϕ .
- (b) Encontre uma base para o núcleo e uma base para a imagem de ϕ .
- (c) Averigue se ϕ é injetiva e/ou sobrejetiva.
- (d) Verifique o Teorema das Dimensões.

14. Seja $\phi : \mathcal{P}_2 \rightarrow \mathcal{P}_2$ uma aplicação linear definida por $\phi(at^2 + bt + c) = (a + c)t^2 + (b + c)t$.

- (a) Verifique se os elementos $t^2 - t - 1$ e $t^2 + t - 1$ pertencem a $\ker(\phi)$.
- (b) Verifique se os elementos $2t^2 - t$ e $t^2 - t + 2$ pertencem a $\text{im}(\phi)$.
- (c) Determine uma base para $\ker(\phi)$ e uma base para $\text{im}(\phi)$.
- (d) Diga, justificando, se ϕ é injetiva e/ou sobrejetiva.

15. Encontre uma base para o núcleo e uma base para a imagem da aplicação linear $\phi : \mathbb{R}^{2 \times 2} \rightarrow \mathbb{R}^{2 \times 2}$ definida por

$$(a) \phi \left(\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} a - b & b - c \\ a - d & b - d \end{bmatrix}; \quad (b) \phi(A) = A^T.$$

16. Considere a aplicação linear $\phi : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^2$ definida por $\phi(X) = AX$, sendo $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}$.

- (a) Verifique que a matriz de ϕ relativamente às bases canônicas de \mathbb{R}^4 e \mathbb{R}^2 é a matriz A .
- (b) Sem determinar o núcleo de ϕ , verifique que $\dim \ker(\phi) \geq 2$.
- (c) Sejam $\mathcal{S} = ((1, 1, 1, 0), (1, 1, 1, 1), (1, 0, 1, 1), (0, 1, 1, 1))$ e $\mathcal{T} = ((1, 1), (1, -1))$ bases de \mathbb{R}^4 e \mathbb{R}^2 , respectivamente. Determine a matriz de ϕ relativamente

- i. à base \mathcal{S} e à base canônica \mathcal{C} de \mathbb{R}^2 ;
- ii. às bases \mathcal{S} e \mathcal{T} ,

17. Seja $\phi : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ uma aplicação linear representada relativamente à base canônica de \mathbb{R}^3 pela matriz

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 3 \end{bmatrix}.$$

- (a) Determine $\phi(1, 2, 3)$ e $\phi(x, y, z)$ para $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$.
- (b) Averigue se ϕ é um isomorfismo.
- (c) Determine a imagem de ϕ e uma sua base, o núcleo de ϕ e uma sua base.
- (d) Determine a matriz de ϕ relativamente à base $\mathcal{B} = ((1, 1, 0), (1, 1, 1), (1, 0, 0))$.

18. Seja $\mathcal{B} = ((1, 1, 1), (1, 1, 0), (1, 0, 0))$ e considere a transformação linear $\phi : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ definida por

$$\phi(1, 1, 1) = (-1, 1), \quad \phi(1, 1, 0) = (1, 1), \quad \phi(1, 0, 0) = (0, 2).$$

- (a) Determine a matriz de ϕ relativamente à base \mathcal{B} de \mathbb{R}^3 e à base canônica \mathbb{R}^2 .
- (b) Calcule $\phi(X)$ sabendo que $[X]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$.
- (c) Determine a matriz de ϕ relativamente às bases canônicas de \mathbb{R}^3 e de \mathbb{R}^2 .
- (d) Determine $\phi(x, y, z)$ para um elemento genérico (x, y, z) de \mathbb{R}^3 .
- (e) Determine o núcleo de ϕ e indique uma base para este subespaço de \mathbb{R}^3 .
- (f) Diga, justificando, se ϕ é injetiva.
- (g) Sem determinar a imagem de ϕ , diga qual a dimensão deste subespaço, usando i. a característica de uma das matrizes representativas de ϕ e ii. o Teorema das Dimensões.
- (h) Usando a dimensão da imagem de ϕ como justificção, diga se ϕ é sobrejetiva.
- (i) Determine a imagem de ϕ , assim como uma base para este subespaço de \mathbb{R}^2 a partir i. da matriz calculada em (c) e ii. da imagem do elemento genérico $\phi(x, y, z)$ calculada em (d).

19. Considere a aplicação linear $\phi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ definida por $\phi(1, 1) = (3, 0, 2)$ e $\phi(1, -1) = (1, 0, 2)$.

- (a) Determine $\phi(x, y)$ para um elemento genérico (x, y) de \mathbb{R}^2 .
- (b) Determine uma base para a imagem de ϕ . Diga, justificando, se ϕ é sobrejetiva.
- (c) Sem determinar o núcleo de ϕ , indique a sua dimensão. Diga, justificando, se ϕ é injetiva.
- (d) Determine a matriz que representa ϕ relativamente às bases

$$\mathcal{S} = ((1, 1), (1, -1)) \quad \text{e} \quad \mathcal{T} = ((0, 1, 0), (1, 0, 1), (0, 0, 1)).$$

- (e) Calcule $[X]_{\mathcal{S}}$ sabendo que $[\phi(X)]_{\mathcal{T}} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$.

20. Considere a transformação linear $\phi : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ representada pela matriz

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

relativamente à base canônica de \mathbb{R}^3 .

- Indique qual é o transformado $\phi(x, y, z)$ de um elemento genérico (x, y, z) de \mathbb{R}^3 .
- Determine a imagem de ϕ e uma base para este subespaço e indique a sua dimensão.
- Diga, justificando, se ϕ é sobrejetiva.
- Sem calcular o núcleo de ϕ , indique, justificando, a sua dimensão e averigue se ϕ é injetiva.
- Calcule a matriz de ϕ relativamente à base $\mathcal{B} = ((1, 2, 1), (0, 1, 1), (0, 0, 1))$.

(f) Sabendo que $[Y]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}$,

- verifique que $Y \in \text{im}(\phi)$;
- determine o vetor de coordenadas na base \mathcal{B} de X , $[X]_{\mathcal{B}}$, sendo X um vetor tal que $\phi(X) = Y$.

21. Seja \mathcal{V} um espaço vetorial real de dimensão n e (X_1, X_2, \dots, X_n) uma base de \mathcal{V} . Seja $\phi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathcal{V}$ definida por

$$\phi(a_1, a_2, \dots, a_n) = a_1 X_1 + a_2 X_2 + \dots + a_n X_n.$$

Mostre que ϕ é um isomorfismo.

22. Seja $\phi : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^6$ uma aplicação linear.

- Se $\dim \ker(\phi) = 2$, qual é a dimensão de $\text{im}(\phi)$?
- Se $\dim \text{im}(\phi) = 3$, qual é a dimensão de $\ker(\phi)$?

23. Seja $\phi : \mathcal{V} \rightarrow \mathbb{R}^5$ uma aplicação linear.

- Se ϕ é sobrejetiva e $\dim \ker(\phi) = 2$, qual é a dimensão de \mathcal{V} ?
- Se ϕ é bijetiva, qual é a dimensão de \mathcal{V} ?

24. Seja $\phi : \mathcal{V} \rightarrow \mathcal{W}$ uma aplicação linear. Mostre que

- $\dim \text{im}(\phi) \leq \dim \mathcal{V}$;
- se ϕ é sobrejetiva, então $\dim \mathcal{W} \leq \dim \mathcal{V}$.

25. Considere $\phi_A : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ uma aplicação linear definida por $\phi_A(X) = AX$, onde $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$.

- Mostre que ϕ_A é injetiva se e só se $\det(A) \neq 0$.
- Verifique que A é diagonalizável com vetores próprios linearmente independentes X_1, \dots, X_n se e só se a matriz representativa de ϕ_A relativamente à base $\mathcal{B} = (X_1, \dots, X_n)$ é diagonal.
- Se A é uma matriz ortogonal, mostre que $\phi_A(X) \cdot \phi_A(Y) = X \cdot Y$, para todo $X, Y \in \mathbb{R}^n$.
- Um subespaço \mathcal{W} de \mathbb{R}^n diz-se ϕ_A -invariante se $\phi_A(X) \in \mathcal{W}$, para todo $X \in \mathcal{W}$. Mostre que
 - o subespaço próprio de A associado a um valor próprio λ é ϕ_A -invariante;
 - o núcleo e a imagem de ϕ_A são subespaços ϕ_A -invariantes.
- Considerando $n = 3$ e

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 3 & 0 \\ 3 & 2 & -2 \end{bmatrix},$$

determine uma matriz diagonal D representativa da aplicação linear ϕ_A relativamente a uma base \mathcal{B} de \mathbb{R}^3 , indicando essa base.

1. (a) Não; (b) sim; (c) sim; (d) não; (e) não; (f) sim.

2. Não.

3. Sim.

4. (a) $(1, -19)$; (b) $(a + b, -5a + 2b)$.

5. (a) $3 + 2t - 5t^2 + 2t^3$; (b) $c + at + bt^2 + at^3$.

6. (a) $M(\phi, \mathcal{C}, \mathcal{C}) = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix}$; (b) $M(\phi, \mathcal{C}, \mathcal{B}) = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \\ -3 & 1 & 0 \end{bmatrix}$; (c) $M(\phi, \mathcal{B}, \mathcal{C}) = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \\ 1 & 3 & 1 \end{bmatrix}$; $M(\phi, \mathcal{B}, \mathcal{B}) = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \\ -3 & 1 & 0 \end{bmatrix}$. $\phi(1, 1, -2) = (1, 1, 0)$

7. (a) $M(\phi, \mathcal{C}_2, \mathcal{C}_3) = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$; (b) $M(\phi, \mathcal{S}, \mathcal{T}) = \begin{bmatrix} 1 & -1/3 \\ 0 & 2/3 \\ -1 & 4/3 \end{bmatrix}$; (c) $\begin{bmatrix} -1 \\ 5 \\ -4 \end{bmatrix}$.

8. (a) $M(\phi, \mathcal{S}, \mathcal{T}) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & -1 \end{bmatrix}$. (b) $4t^2 - 4t + 1$.

9. (b) i. $M(\phi, \mathcal{C}, \mathcal{C}) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 3 \end{bmatrix}$; ii. $M(\phi, \mathcal{C}, \mathcal{S}) = \begin{bmatrix} 3 & -2 & 5 & -3 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & 3 & 0 \\ -2 & 2 & -3 & 3 \end{bmatrix}$; iii. $M(\phi, \mathcal{S}, \mathcal{C}) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 2 \\ 2 & 0 & 3 & 2 \\ 0 & 2 & 3 & 3 \end{bmatrix}$;
iv. $M(\phi, \mathcal{S}, \mathcal{S}) = \begin{bmatrix} 3 & -2 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 2 \\ 2 & 0 & 3 & 2 \\ -2 & 2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

10. (a) $[\phi(X_1)]_{\mathcal{T}} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix}$, $[\phi(X_2)]_{\mathcal{T}} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix}$; (b) $\phi(X_1) = t^2 + t + 2$, $\phi(X_2) = -t + 2$; (c) $\frac{3}{2}t^2 + t + 4$;
(d) $(\frac{a+b}{2})t^2 + bt + 2a$.

11. (a) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$; (b) $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 6 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

13. (a) $\ker(\phi) = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 : x = -y = -z = t\}$ e $\text{im}(\phi) = \mathbb{R}^3$. (b) Por exemplo, $\{(1, -1, -1, 1)\}$ é uma base de $\ker(\phi)$ e $\{(1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1)\}$ é uma base de $\text{im}(\phi)$. (c) ϕ não é injetiva e é sobrejetiva.

14. (a) O primeiro elemento não pertence e o segundo pertence. (b) O primeiro elemento pertence e o segundo não pertence. (c) Por exemplo, $\{t^2 + t - 1\}$ é uma base de $\ker(\phi)$ e $\{t^2, t\}$ é uma base de $\text{im}(\phi)$. (d) ϕ não é injetiva nem sobrejetiva.

15. (a) $\left\{ \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \right\}$ é uma base de $\ker(\phi)$ e $\left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \right\}$ é uma base da $\text{im}(\phi)$. (b) O conjunto vazio é base de $\ker(\phi)$ e a base canónica de $\mathbb{R}^{2 \times 2}$ é uma base da $\text{im}(\phi)$.

16. (c) i. $M(\phi, \mathcal{S}, \mathcal{C}) = \begin{bmatrix} 3 & 4 & 4 & 3 \\ 4 & 3 & 2 & 0 \end{bmatrix}$; ii. $M(\phi, \mathcal{S}, \mathcal{T}) = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 7 & 7 & 6 & 3 \\ -1 & 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$.

17. (a) $\phi(1, 2, 3) = (9, 7, 16)$ e $\phi(x, y, z) = (x+y+2z, 2x+y+z, 3x+2y+3z)$. (b) Não. (c) $\text{im}(\phi) = \{(a, b, c) \in \mathbb{R}^3 : a + b - c = 0\}$ e $\{(1, 0, 1), (0, 1, 1)\}$ é uma sua base; $\text{ker}(\phi) = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x = z \text{ e } y = -3z\}$ e $\{(1, -3, 1)\}$ é uma sua base. (d) $\begin{bmatrix} -2 & -4 & -1 \\ 5 & 8 & 3 \\ -1 & 0 & -1 \end{bmatrix}$.
18. (a) $M(\phi, \mathcal{B}, \mathcal{C}_2) = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$. (b) $\phi(X) = (1, 9)$. (c) $M(\phi, \mathcal{C}_3, \mathcal{C}_2) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -2 \\ 2 & -1 & 0 \end{bmatrix}$. (d) $\phi(x, y, z) = (y - 2z, 2x - y)$. (e) $\text{ker}(\phi) = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x = z \text{ e } y = 2z\}$ e $\{(1, 2, 1)\}$ é uma sua base. (f) ϕ não é injetiva. (g) 2. (h) ϕ é sobrejetiva. (i) $\text{im}(\phi) = \mathbb{R}^2$.
19. (a) $\phi(x, y) = (2x + y, 0, 2x)$. (b) $\{(1, 0, 0), (0, 0, 1)\}$ é uma base para $\text{im}(\phi)$ e ϕ não é sobrejetiva. (c) $\dim \text{ker}(\phi) = 0$ e ϕ é injetiva. (d) $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 3 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$. (e) $\begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \end{bmatrix}$.
20. (a) $\phi(x, y, z) = (x + 2y + z, 3y + z, x - y)$. (b) $\text{im}(\phi) = \{(a, b, c) \in \mathbb{R}^3 : a - b - c = 0\}$, $\{(1, 1, 0), (1, 0, 1)\}$ é uma base para $\text{im}(\phi)$ e $\dim \text{im}(\phi) = 2$. (c) ϕ não é sobrejetiva. (d) $\dim \text{ker}(\phi) = 1$ e ϕ não é injetiva. (e) $\begin{bmatrix} 6 & 3 & 1 \\ -5 & -2 & -1 \\ -2 & -2 & 0 \end{bmatrix}$. (f) ii. Por exemplo, $[X]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} \\ 0 \end{bmatrix}$.
22. (a) 2; (b) 1.
23. (a) 7; (b) 5.
25. (e) $\begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}$ é a matriz representativa de ϕ em relação à base $\mathcal{B} = \left(\begin{bmatrix} 0 \\ 5 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 6 \\ 3 \\ 8 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right)$.