Séries Numéricas

Corpo Docente:

Ana Breda (Responsável)
Paolo Vettori
Sandrina Santos

Departamento de Matemática

Universidade de Aveiro

Setembro de 2016

Slides com ligeiras adaptações de outros já existentes fortemente baseados no texto de **Virgínia Santos** indicado na bibliografia

Def. 2.1

Seja (a_n) uma sucessão de números reais.
Chamamos **série numérica de termo geral a_n** à "soma de todos os termos da sucessão $(a_n)_n$":

$$a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n \geq 1} a_n$$

A **sucessão das somas parciais** $(S_n)_n$ associada a esta série é a sucessão definida por

$$S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n$$

Obs. 2.2

Um exemplo de série é a **série harmónica** dada por

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{n} + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}.$$

Def. 2.3

Dizemos que uma **série** $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ é **convergente** se $\lim_{n\to+\infty} S_n$ existe e é finito, caso em que é designado por **soma da série** e escrevemos

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \lim_{n\to+\infty} S_n$$

Se $(S_n)_n$ é divergente, dizemos que a **série** é **divergente**.

Exer. 2.4

Estude a convergência das seguintes séries:

(a) $\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n$ (b) $\sum_{n=1}^{+\infty} \alpha$, $\alpha \in \mathbb{R}$ (c) $\sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right)$

Def. 2.5

Uma **série geométrica** de *razão* $r \in \mathbb{R}$, é uma série do tipo

$$a + ar + ar^2 + \cdots + ar^{n-1} + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} ar^{n-1} = \sum_{n=0}^{\infty} ar^n,$$

onde $a \in \mathbb{R}$ é o primeiro termo da série.

Obs. 2.6

O termo geral, S_n, da sucessão de somas parciais é dado por:

$$S_n = \begin{cases} na, & \text{se } r = 1 \\ a\,\dfrac{1-r^n}{1-r}, & \text{se } r \neq 1 \end{cases}$$

Obs. 2.6 (cont.)

Conclui-se assim que, para $a \neq 0$:

$$\boxed{\sum_{n=1}^{\infty} ar^{n-1} \text{ converge se e só se } |r| < 1}$$

e nesse caso

$$\sum_{n=1}^{\infty} ar^{n-1} = \frac{a}{1-r}$$

Exer. 2.7

Verifique se as seguintes séries são convergentes e em caso afirmativo calcule a sua soma:

(a) $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{99}{100}\right)^n$ (b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \left(\frac{3}{e}\right)^n$ (c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2^{n-1}}{3^n}$ (d) $\displaystyle\sum_{n=3}^{+\infty} 2^{-n}$

Def. 2.8

Uma série $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ diz-se **redutível** (ou de **Mengoli** ou **telescópica**) se o seu termo geral se puder escrever numa das seguintes formas:

$$a_n = u_n - u_{n+p} \quad \text{ou} \quad a_n = u_{n+p} - u_n$$

onde (u_n) é uma sucessão e $p \in \mathbb{N}$.

Obs. 2.9

No caso em que $a_n = u_n - u_{n+p}$

$$S_n = \sum_{k=1}^{p} u_k - \sum_{k=n+1}^{n+p} u_k = u_1 + \cdots + u_p - (u_{n+1} + \cdots + u_{n+p})$$

e no caso em que $a_n = u_{n+p} - u_n$

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k = \sum_{k=n+1}^{n+p} u_k - \sum_{k=1}^{p} u_k = u_{n+1} + \ldots + u_{n+p} - (u_1 + \ldots + u_p)$$

Obs. 2.9 (cont.)

Assim, a série é convergente se $\lim_{n\to+\infty}(u_{n+1}+\cdots+u_{n+p})$ for finito.

Além disso, se $\lim_{n\to+\infty} u_n = k \in \mathbb{R}$, então $\lim_{n\to+\infty}(u_{n+1}+\cdots+u_{n+p}) = pk$.

Exer. 2.10

Determine a soma (se existir) das seguintes séries:

(a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+2}\right)$

(b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\ln\left(\frac{n}{n+1}\right)$

(c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n(n+1)}$

(d) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{1}{2n}-\frac{1}{2n+2}\right)$

(e) $\displaystyle\sum_{n=2}^{+\infty}\frac{3}{(n+1)(n+4)}$

(f) $\displaystyle\sum_{n=2}^{+\infty}\frac{2}{n^2-1}$

Teo. 2.11

As séries

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \ \text{ e } \ \sum_{n=p+1}^{\infty} a_n = a_{p+1} + a_{p+2} + \cdots , \ \forall p \in \mathbb{N}$$

têm a mesma natureza. Assim, a natureza de uma série não depende dos seus primeiros termos.

Obs. 2.12

Como $S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$ e $S'_n = \sum_{k=p+1}^{n} a_k$ (com $n > p+1$), temos

$S_n = S'_n + \sum_{k=1}^{p} a_k$, e, portanto, se existir um dos limites o outro também existe:

$$\lim_n S_n = \lim_n S'_n + \sum_{k=1}^{p} a_k$$

Teo. 2.13

Se a série $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ é convergente, então $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$.

Obs. 2.14

O resultado anterior é considerado como um primeiro critério de convergência de uma série. Na verdade, o critério é útil na sua forma contrapositiva, isto é:

$$\boxed{\text{se } \lim_{n\to\infty} a_n \neq 0 \text{ ou não existir} \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ é divergente}}$$

revelando-se, assim, como um "critério de divergência". Note-se que se $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$, nada se pode concluir sobre a natureza da série.

Exer. 2.15

Analise a natureza das séries seguintes, tendo em conta a condição necessária de convergência de séries numéricas:

(a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n$

(b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\ln\left(\frac{n}{n+1}\right)$

(c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n}$

(d) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\sqrt[n]{n}$

(e) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\left(1+\frac{2}{n}\right)^n$

(f) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{1+\left(\frac{7}{10}\right)^n}$

Teo. 2.16

(a) Sejam $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ e $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ duas séries numéricas convergentes com somas A e B respetivamente. Então a série $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n + b_n)$ é convergente e

$$\sum_{n=1}^{\infty}(a_n + b_n) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n + \sum_{n=1}^{\infty} b_n = A + B$$

(b) Se $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ é convergente e tem soma A, então $\forall \lambda \in \mathbb{R}$, $\sum_{n=1}^{\infty} \lambda a_n$ é convergente e tem soma λA,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \lambda a_n = \lambda A.$$

Teo. 2.16 (cont.)

(c) Se $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ é divergente então $\forall \lambda \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$, $\sum_{n=1}^{\infty} \lambda a_n$ é divergente.

(d) Se $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ é convergente e $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ é divergente, então a série $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n)$ é divergente.

Obs. 2.17

Note-se que o resultado anterior nada diz quanto ao caso de ambas as séries serem divergentes. Na verdade, a série resultante $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n)$ tanto pode ser convergente como divergente.

Exer. 2.18

Verifique se as seguintes séries são convergentes e, em caso afirmativo, determine a sua soma:

(a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} 50 \ln\left(\frac{n}{n+1}\right)$

(b) $\displaystyle\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{12}{n^2-1}$

(c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \left[\left(\frac{7}{11}\right)^n + \left(\frac{10}{3}\right)^n\right]$

(d) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{3^n-2^n}{4^n}$

Def. 2.19

Dizemos que a série $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ é uma **série de termos não negativos** se, $\forall n \in \mathbb{N}$, se tem $a_n \geq 0$.

Exer. 2.20

Verifique quais das seguintes séries são séries de termos não negativos:

(a) $\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n$

(b) $\sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right)$

(c) $\sum_{n=1}^{+\infty} \cos(n)$

(d) $\sum_{n=1}^{+\infty} \cos\left(\frac{1}{n}\right)$

Séries de termos não negativos

Teo. 2.21

Seja $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ uma série de termos não negativos. Então a sucessão das somas parciais associada à série é monótona crescente.

Teo. 2.22

Seja $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ uma série de termos não negativos. Então, a série é convergente se e só se a sua sucessão das somas parciais é limitada superiormente.

Teo. 2.23

Seja $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ uma série de termos não negativos e $f : [1, +\infty[\to \mathbb{R}$ uma função decrescente e tal que $f(n) = a_n$, $\forall n \in \mathbb{N}$. Então

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \quad \text{e} \quad \int_1^{+\infty} f(x)dx$$

têm a mesma natureza.

Exer. 2.24

Estude a natureza das seguintes séries:

(a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ (b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ (c) $\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n\ln(n)}$

Def. 2.25

A uma série da forma

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha}, \quad \alpha \in \mathbb{R}$$

chamamos **série de Dirichlet** (ou **série harmónica de ordem α**).

Obs. 2.26

A convergência destas séries é analisada usando o critério do integral. É fácil ver que (exercício!)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha} \text{ é : } \begin{cases} \text{convergente se } \alpha > 1 \\ \text{divergente se } \alpha \leq 1 \end{cases} .$$

Exer. 2.27

Indique a natureza das seguintes séries

(a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$

(b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{3/2}}$

(c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[10]{n^5}}$

(d) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} n^{-1/2}$

Obs. 2.28

Convém notar que, na utilização do critério do integral, o valor obtido na resolução do integral impróprio quando este é convergente **não é** a soma da respectiva série.

Teo. 2.29

Suponha-se que existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$0 \leq a_n \leq b_n, \quad \forall n \geq n_0, n_0 \in \mathbb{N}.$$

Então:

(a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ converge $\Rightarrow \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge.

(b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ diverge $\Rightarrow \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ diverge.

Obs. 2.30

Convém notar que, se $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ for divergente ou $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ for convergente, nada se pode concluir.

Teo. 2.31

Sejam $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ e $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ duas séries tais que $a_n \geq 0$ e $b_n > 0\ \forall n \in \mathbb{N}$.
Suponha-se que existe o limite

$$L = \lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n}$$

Então verificam-se as condições seguintes:

(a) se $L \in \mathbb{R}^+$, então as séries têm a mesma natureza.

(b) se $L = 0$, $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ converge $\Rightarrow$ $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge.

(c) se $L = +\infty$, $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ diverge $\Rightarrow$ $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ diverge.

Obs. 2.32

Podemos assim concluir que a série $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ funciona como referência, sendo necessário conhecer à partida a sua natureza. A escolha desta série é normalmente sugerida pela forma da série $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$. Em muitas situações, as séries de Dirichlet $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha}$ revelam-se de grande utilidade (como referência).

Exer. 2.33

Use o critério da comparação ou o critério do limite para estudar a natureza das séries seguintes:

(a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\operatorname{sen}(n)}{n^4}$

(b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n+\sqrt{n^3}}$

(c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{17n-13}$

(d) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{10n^2}{n^6+1}$

(e) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{37n^3+2}}$

(f) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{sen}\left(\frac{1}{n}\right)$

(g) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\arctan(1/n)}{n^2}$

(h) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{e^{1/n}}{n}$

Def. 2.34

Seja $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ uma série de números reais e $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ a correspondente **série dos módulos**.

(a) Se $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ converge, então $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ diz-se **absolutamente convergente**.

(b) Se $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ diverge mas $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge, então $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ diz-se **simplesmente convergente**.

Teo. 2.35

Toda a série absolutamente convergente é também convergente.

Obs. 2.36

(a) Realça-se que se $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ diverge, então nada se pode concluir sobre a natureza de $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$. Esta pode ser convergente ou divergente.

(b) Como $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ é uma série de termos não negativos, então podemos aplicar os critérios vistos anteriormente para estudar a sua natureza.

Exer. 2.37

Verifique se as séries seguintes são absolutamente convergentes:

(a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2}$

(b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$

(c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(n)}{e^n}$

(d) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n n}{n^2+1}$

Teo. 2.38

Seja $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ uma série de números reais <u>não nulos</u> e

$$L = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right|$$

Se o limite existir, verificam-se as condições seguintes:

(a) se $0 \leq L < 1$, então $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ é absolutamente convergente.

(b) se $L > 1$ ou $L = +\infty$, então $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ é divergente.

(c) se $L = 1$, nada se pode concluir (devemos utilizar outro critério para estudar a natureza da série).

Critério da Raíz ou de Cauchy

Teo. 2.39

Seja $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ uma série de números reais e

$$L = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}$$

Se o limite existir, verificam-se as condições seguintes:

(a) se $0 \leq L < 1$, então $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ é absolutamente convergente.

(b) se $L > 1$ ou $L = +\infty$, então $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ é divergente.

(c) se $L = 1$, nada se pode concluir (devemos utilizar outro critério para estudar a natureza da série).

Exer. 2.40

Estude a natureza das seguintes séries:

(a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!2^n}$

(b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\ln n}{n}\right)^n$

(c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{2^n n!}$

(d) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!n^2}{(2n)!}$

(e) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{n^n}{3^{n^2}}$

(f) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left(\frac{n}{n+1}\right)^n$

(g) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} n \left(\frac{4}{3}\right)^n$

(h) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n n! + 1}{n^n}$

Def. 2.41

Uma **série alternada** é uma série onde os seus termos são alternadamente positivos e negativos, ou seja,

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n a_n \quad \text{ou} \quad \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1} a_n$$

onde $a_n > 0$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

Exer. 2.42

Verifique se as seguintes séries são alternadas:

(a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n \frac{1}{n}$

(b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n+1} \frac{2^n}{n^4}$

(c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\cos(n)}{n!}$

(d) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\cos(n\pi)}{n!}$

Teo. 2.43

Seja $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n a_n$ com $a_n > 0, \forall n \in \mathbb{N}$ uma série alternada. Se

(a) a sucessão (a_n) é monótona decrescente;

(b) $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$;

então a série é convergente.

Exer. 2.44

Estude a natureza das seguintes séries usando o critério de Leibniz.

(a) $\sum_{n=2}^{\infty}(-1)^n \frac{1}{n}$

(b) $\sum_{n=2}^{\infty}(-1)^n \frac{1}{\ln n}$

(c) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{1}{\sqrt[n]{n}}$

(d) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{2n+1}}$

Exer. 2.45

Estude a natureza (divergência, convergência absoluta ou convergência simples) das seguintes séries numéricas:

(a) $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{n}$

(b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2^n}$

(c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{\sqrt[n]{n}}$

(d) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-10)^n}{n!}$

(e) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2\sqrt{n}-1}$

(f) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\mathrm{sen}(1/n)$

(g) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{n!}{n^{10}}$

(h) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n-\sqrt{n}}{(n+\sqrt{n})^2}$

(i) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n}{n+1}\right)^{n^2}$

(j) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{1}{n}-\frac{1}{5^n}\right]$

2.4.
(a) Div.
(b) Conv. e $S = 0$ se $\alpha = 0$;
Div. se $\alpha \neq 0$
(c) Conv. e $S = 1$

2.7.
(a) Conv. e $S = 100$
(b) Div.
(c) Conv. e $S = 1$
(d) Conv. e $S = \frac{1}{4}$

2.10.
(a) $S = \frac{3}{2}$
(b) Div.
(c) $S = 1$
(d) $S = \frac{1}{2}$
(e) $S = \frac{47}{60}$
(f) $S = \frac{3}{2}$

2.15.
(a) Div.
(b) Nada se pode concluir
(c) Nada se pode concluir
(d) Div.
(e) Div.
(f) Div.

2.18.
(a) Div.
(b) Conv. e $S = 9$
(c) Div.
(d) Conv. e $S = 2$

2.20.
(a) Não
(b) Sim
(c) Não
(d) Sim

2.24.
(a) Div.
(b) Conv.
(c) Div.

2.27.
(a) Conv.
(b) Conv.
(c) Div.
(d) Div.

2.33.
(a) Conv.
(b) Conv.
(c) Div.
(d) Conv.
(e) Conv.
(f) Div.
(g) Conv.
(h) Div.

2.37.
(a) Sim
(b) Não
(c) Sim
(d) Não

2.40.
(a) Abs. Conv.
(b) Abs. Conv.
(c) Div.
(d) Abs. Conv.
(e) Abs. Conv.
(f) Div.
(g) Div.
(h) Div.

2.42.
(a) Sim
(b) Sim
(c) Não
(d) Sim

2.44.
(a) Conv.
(b) Conv.
(c) Nada se pode concluir
(d) Conv.

2.45.
(a) Simp. Conv.
(b) Abs. Conv.
(c) Div.
(d) Abs. Conv.
(e) Simp. Conv.
(f) Simp. Conv.
(g) Div.
(h) Div.
(i) Abs. Conv.
(j) Div.