Departamento de Matemática da Universidade de Aveiro

Cálculo I - agr. 1 **2017/18**

teste facultativo Duração: 1h30

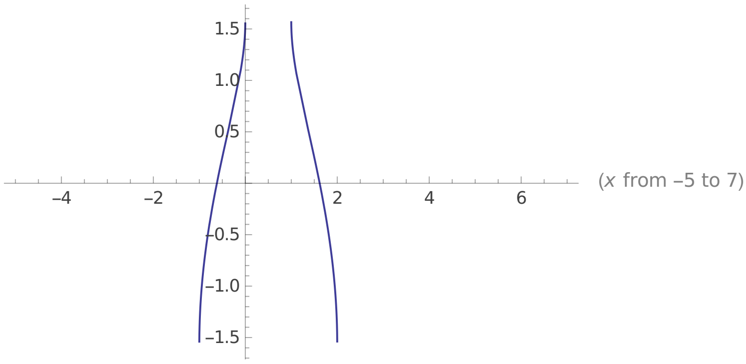
- **Este teste continua no verso e termina com a palavra FIM. No verso encontras também a cotação e formulários.**
- **Todos os raciocínios devem ser convenientemente justificados e todas as respostas devem ser cuidadosamente redigidas.**

---

1. Considera a função real de variável real dada pela expressão

$$f(x) := \frac{\pi}{2} - \arccos(1 + x - x^2).$$

Em baixo podes ver um esboço do seu gráfico tal como produzido por um conhecido sistema de álgebra computacional (CAS).



Não se garante que este esboço esteja cem por cento correto. Foi aqui colocado para o caso de achares que é útil, mas usa-o por tua conta e risco. O que se pede que faças aqui é que resolvas as questões abaixo usando as técnicas que foram dadas nas aulas (em particular não serão aceites justificações com base no esboço acima):

(a) Determina o domínio D_f de definição de f.

(b) Determina, caso existam, os extremos absolutos e os extremantes absolutos de f (se achares que não existem, deves explicar porquê).

2. Calcula as primitivas das seguintes funções:

(a) $(2x^3 + x) \cdot \arctan x$.

(b) $\dfrac{2x+1}{x^3+x}$.

(c) $\dfrac{3}{x^2\sqrt{x^2-9}}$, $x < -3$.

Sugestão: Na alínea (a) utiliza primitivação por partes e na alínea (c) utiliza a mudança de variável definida por $x = 3\sec t$, $t \in]\frac{\pi}{2}, \pi[$.

3. Seja $f(x) := \arcsin x$, $x \in [-1, 1]$.

   (a) Calcula $\lim_{x\to 1^-} \frac{f(1)-f(x)}{1-x}$.

   (b) Mostra que não existe nenhum número positivo k tal que $f(1) - f(x) \leq k(x-1)$ para todos os valores de x no domínio de f.

   Sugestão: Argumenta por contradição e tira partido do resultado da alínea anterior.

FIM

Cotação:

1. 3; 2. 4,5; 3. 2,5.

Algumas fórmulas de derivação

função de x	$\frac{\mathbf{d}}{\mathbf{dx}}$
$m\,u(x),\ \ m \in \mathbb{R}$	$m\,u'(x)$
$u(x)^n,\ \ n \in \mathbb{R}$	$n\,u(x)^{n-1}\,u'(x)$
$\ln_a \lvert u(x)\rvert,\ \ a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\}$	$\frac{u'(x)}{u(x)\ln a}$
$a^{u(x)},\ \ a \in \mathbb{R}^+$	$a^{u(x)}u'(x)\ln a$
$\sin u(x)$	$\cos u(x)\,u'(x)$
$\cos u(x)$	$-\sin u(x)\,u'(x)$
$\tan u(x)$	$\sec^2 u(x)\,u'(x)$
$\operatorname{cotan} u(x)$	$-\csc^2 u(x)\,u'(x)$
$\sec u(x)$	$\tan u(x)\ \sec u(x)\,u'(x)$
$\csc u(x)$	$-\operatorname{cotan} u(x)\ \csc u(x)\,u'(x)$
$\sinh u(x)$	$\cosh u(x)\,u'(x)$
$\cosh u(x)$	$\sinh u(x)\,u'(x)$
$\arcsin u(x)$	$\frac{u'(x)}{\sqrt{1-u(x)^2}}$
$\arccos u(x)$	$-\frac{u'(x)}{\sqrt{1-u(x)^2}}$
$\arctan u(x)$	$\frac{u'(x)}{1+u(x)^2}$
$\operatorname{arccot} u(x)$	$-\frac{u'(x)}{1+u(x)^2}$

Algumas fórmulas trigonométricas

$\sec u = \frac{1}{\cos u}$	$\csc u = \frac{1}{\sin u}$	$\cot u = \frac{\cos u}{\sin u}$
$\cos^2 u = \frac{1+\cos(2u)}{2}$	$\sin^2 u = \frac{1-\cos(2u)}{2}$	
$1 + \tan^2 u = \sec^2 u$	$1 + \operatorname{cotan}^2 u = \csc^2 u$	
$\cos^2(\arcsin u) = 1 - u^2$	$\sin^2(\arccos u) = 1 - u^2$	