Cálculo I — agr. 4 — 2016/17

Resolução do 1º teste

(e algumas observações adicionais)

1. $f(x) := \arcsin(3x-4x^3)$.

(a) $D_f = \{x \in \mathbb{R} : 3x-4x^3 \in [-1,1]\}$

$(3x-4x^3)' = 3-12x^2$

$3-12x^2 \geq 0 \Leftrightarrow 12x^2 \leq 3$

$\Leftrightarrow x^2 \leq \frac{1}{4} \Leftrightarrow |x| \leq \frac{1}{2}$

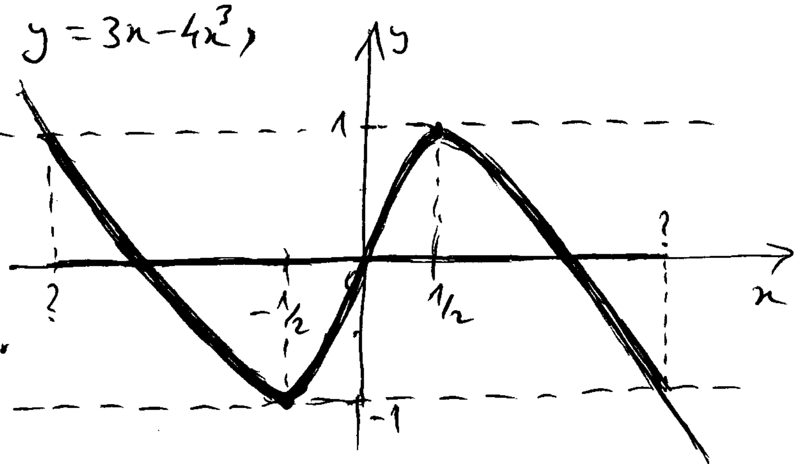
$\Leftrightarrow -\frac{1}{2} \leq x \leq \frac{1}{2}$.

	$-\infty$		$-\frac{1}{2}$		$\frac{1}{2}$		∞
$(3x-4x^3)'$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$3x-4x^3$	∞	$\searrow$	-1	$\nearrow$	1	$\searrow$	$-\infty$

$\lim_{x\to\infty}(3x-4x^3) = -\infty$; $\lim_{x\to-\infty}(3x-4x^3) = \infty$; $3\times\left(-\frac{1}{2}\right) - 4\left(-\frac{1}{2}\right)^3 =$

$= -\frac{3}{2} + \frac{1}{2} = -1$; $3\times\left(\frac{1}{2}\right) - 4\left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{3}{2} - \frac{1}{2} = 1$.

Esboço sumário de $y = 3x-4x^3$, assinalando a parte relevante para resolver $3x-4x^3 \in [-1,1]$.



Assim, será necessário determinar

(i) o ponto, para além de $\frac{1}{2}$, em que $3x-4x^3 = 1$;

(ii) o ponto, para além de $-\frac{1}{2}$, em que $3x-4x^3 = -1$

Isso pode fazer-se baixando o grau através da regra de Ruffini com $\frac{1}{2}$ e $-\frac{1}{2}$ respectivamente, mas eventualmente seria mais fácil observar que

- salta à vista que -1 é raiz de $3x-4x^3 = 1$;
- salta à vista que 1 é raiz de $3x-4x^3 = -1$.

Conjugando com o esboço gráfico feito atrás, conclui-se que $D_f = [-1,1]$.

Obs.: O anterior é somente um processo de resolução. Uma alternativa poderia ser tentar resolver analiticamente as desigualdades $-1 \leq 3x-4x^3 \leq 1$, começando por descobrir um zero de $4x^3-3x-1$ e um zero de $4x^3-3x+1$ por inspecção directa e baixar o grau através do uso da regra de Ruffini.

(b) $f'(x) = \dfrac{3-12x^2}{\sqrt{1-(3x-4x^3)^2}}$ para x tal que $1-(3x-4x^3)^2>0$,

i.e., para x tal que $-1<3x-4x^3<1$. Olhando novamente para o esboço da página anterior, vemos que esta dupla desigualdade equivale a $x \in]-1,-\frac{1}{2}[\cup]-\frac{1}{2},\frac{1}{2}[\cup]\frac{1}{2},1[$. Nestes pontos, onde garantidamente existe,

$$f'(x)=0 \Leftrightarrow 3-12x^2=0 \Leftrightarrow 12x^2=3 \Leftrightarrow x=\pm\frac{1}{2},$$

ou seja, naqueles pontos a derivada nunca se anula. No entanto, como f é contínua em $[-1,1]$ (por ser aí composição de funções contínuas), pelo Teorema de Weierstrass f tem que ter máximo e mínimo absolutos em $[-1,1]$. Como, atendendo ao Teorema de Fermat e ao que se observou acima, esses extremos não podem ocorrer em $]-1,1[\setminus \{-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\}$, terão obrigatoriamente que ocorrer no conjunto $\{-1,-\frac{1}{2},\frac{1}{2},1\}$.

$f(-\frac{1}{2}) = \arcsin(-1) = -\frac{\pi}{2}$; $f(\frac{1}{2}) = \arcsin 1 = \frac{\pi}{2}$;

$f(-1) = \arcsin 1 = \frac{\pi}{2}$; $f(1) = \arcsin(-1) = -\frac{\pi}{2}$.

Em conclusão, o máximo absoluto é $\frac{\pi}{2}$ e os maximizantes absolutos são -1 e $\frac{1}{2}$; o mínimo absoluto é $-\frac{\pi}{2}$ e os minimizantes absolutos são $-\frac{1}{2}$ e 1.

Obs.: Em alternativa, também se poderia ter resolvido esta alínea através do quadro de variação de f e invocando a continuidade desta função.

primitivação por partes

2.(a) $\int x \cdot \operatorname{arctg}(x+1)\, dx = \frac{x^2}{2} \cdot \operatorname{arctg}(x+1) - \int \frac{x^2}{2} \cdot \frac{1}{1+(x+1)^2}\, dx$

$$= \frac{x^2}{2} \cdot \operatorname{arctg}(x+1) - \frac{1}{2} \int \frac{x^2}{x^2+2x+2}\, dx$$

C.A.:
$$\begin{array}{r|l} \cancel{x^2} & x^2+2x+2 \\ \cancel{-x^2}-2x-2 & 1 \\ \hline -2x-2 & \end{array}$$

$$\frac{x^2}{x^2+2x+2} = 1 - \frac{2x+2}{x^2+2x+2}$$

Então $\int x \cdot \operatorname{arctg}(x+1)\, dx = \frac{x^2}{2} \cdot \operatorname{arctg}(x+1) - \frac{1}{2} \int 1 - \frac{2x+2}{x^2+2x+2}\, dx$

$= \frac{x^2}{2} \cdot \operatorname{arctg}(x+1) - \frac{1}{2}x + \frac{1}{2} \ln|x^2+2x+2| + C$, em intervalos do domínio.

(b) $\int \frac{5x-7}{(x-1)(x^2-2x+2)}\, dx$ (primitiva de função racional)

C.A.: $x^2-2x+2=0 \Leftrightarrow x = \frac{2 \pm \sqrt{4-8}}{2}$ $\quad 4-8=-4=4i^2$ $\quad \Leftrightarrow x = 1 \pm i$

$$\frac{5x-7}{(x-1)(x^2-2x+2)} = \frac{A}{x-1} + \frac{Bx+C}{x^2-2x+2}$$

$\Rightarrow 5x-7 = A(x^2-2x+2) + (Bx+C)(x-1)$

$$\Leftrightarrow 5x-7 = Ax^2 - 2Ax + 2A + Bx^2 - Bx + Cx - C$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} A+B=0 \\ -2A-B+C=5 \\ 2A-C=-7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} B=-A \\ C=2A+7 \\ -\cancel{2A}+A+\cancel{2A}+7=5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A=-2 \\ B=2 \\ C=3 \end{cases}$$

Então $\displaystyle\int \frac{5x-7}{(x-1)(x^2-2x+2)}\,dx = \int \frac{-2}{x-1}\,dx + \int \frac{2x+3}{x^2-2x+2}\,dx$

$$= -2\ln|x-1| + \int \frac{2x-2}{x^2-2x+2} + \frac{5}{x^2-2x+2}\,dx$$

$$= -2\ln|x-1| + \ln|x^2-2x+2| + \int \frac{5}{(x-1)^2+1}\,dx$$

$$= -2\ln|x-1| + \ln|x^2-2x+2| + 5\,\mathrm{arctg}(x-1) + C,$$

em intervalos do domínio.

(c) $\displaystyle\int \frac{e^{2x}}{\sqrt{e^x-1}}\,dx$

Mudança de variável tal que $e^x - 1 = t^2$,

$\Leftrightarrow e^x = t^2+1$, $\Leftrightarrow x = \ln(t^2+1)$

$\dfrac{dx}{dt} = \dfrac{2t}{t^2+1} > 0$ se $t>0$. Escolhemos $t>0$.

$$\int \frac{e^{2x}}{\sqrt{e^x-1}}\,dx = \int \frac{(t^2+1)^2}{\sqrt{t^2}} \cdot \frac{2t}{\cancel{t^2+1}}\,dt = \int \frac{t^2+1}{\cancel{t}} \cdot 2\cancel{t}\,dt$$

$$= 2\frac{t^3}{3} + 2t + C = \frac{2}{3}(e^x-1)^{3/2} + 2\sqrt{e^x-1} + C,$$

em intervalos do domínio.

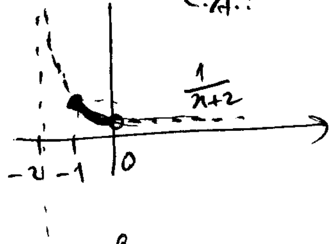
3. $$f(x) := \begin{cases} 1, & \text{se } x=-2 \text{ ou } x=0, \\ \dfrac{1}{x+2}, & \text{se } -2<x<0, \\ \sqrt{4-x^2}, & \text{se } 0<x\leq 2. \end{cases}$$

(a) Em $[-2,-1]$ a função é ilimitada $\left(\lim_{x\to-2^+} f(x) = \lim_{x\to-2^+} \frac{1}{x+2} = \infty\right)$, logo não é integrável.

Em $[-1,0]$ a função é limitada:

	-1		0
f	1	$\frac{1}{x+2}$: $1 \searrow \frac{1}{2}$	1

C.A.:



Além disso, só não é contínua em 0, logo, pelo 2.º critério de integrabilidade, f é integrável em $[-1,0]$.

Analogamente se conclui que f é integrável em $[0,2]$, pois f é limitada aí,

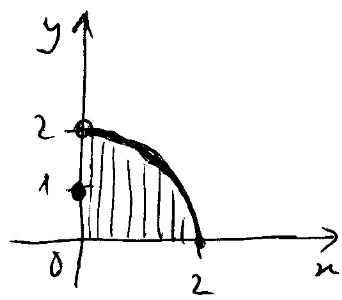
	0		2
$-\frac{x}{\sqrt{4-x^2}}$		$-$	
f	1	$2 \searrow 0$	0

,

C.A.: $f'(x) = -\frac{x}{\sqrt{4-x^2}}$ em $]0,2[$.

e é apenas descontínua em 0.

(b) Acabámos de ver que o integral de f existe em $[0,2]$. Observando que $y=\sqrt{4-x^2} \Rightarrow x^2+y^2=4$, então em $]0,2]$ o gráfico de f está contido na circunferência de centro em $(0,0)$ e raio 2. Mais precisamente, o gráfico de f em $[0,2]$ encontra-se esboçado acima.



O 2.º critério de integrabilidade também nos garante que o integral de f em $[0,2]$ é o mesmo que o integral de $\sqrt{4-x^2}$ em $[0,2]$. Usando a interpretação geométrica do integral,

$$\int_0^2 f(x)\,dx = \int_0^2 \sqrt{4-x^2}\,dx = \text{"área de } 1/4 \text{ do círculo de raio } 2\text{"} = \frac{\pi.2^2}{4} = \pi.$$

(c) Como o integral existe em $[-1,0]$ e em $[0,2]$, como vimos, pela aditividade do integral também existe em $[-1,2]$ e

$$\int_{-1}^2 f(x)\,dx = \int_{-1}^0 f(x)\,dx + \int_0^2 f(x)\,dx$$

O valor de f em 0 pode ser substituído por $\frac{1}{2}$, pelo 2.º critério de integrabilidade →

$$= \int_{-1}^0 \frac{1}{x+2}\,dx + \pi$$ ← fórmula de Barrow

$$= \left[\ln|x+2|\right]_{-1}^0 + \pi$$

$$= \ln 2 - \ln 1 + \pi = \ln 2 + \pi.$$

4. $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \geq 0 \wedge x+2 \leq y \leq \sqrt{9x}\}$.

(a) $\begin{cases} y = x+2 \\ y = \sqrt{9x} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{9x} = x+2 \\ \text{—} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 9x = x^2+4x+4 \\ \text{—} \end{cases}$

C.A.: $x^2 - 5x + 4 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{5 \pm \sqrt{25-16}}{2} \Leftrightarrow x = \frac{5 \pm 3}{2}$ ($25-16 = 9$)

$\Leftrightarrow x = 1 \vee x = 4$

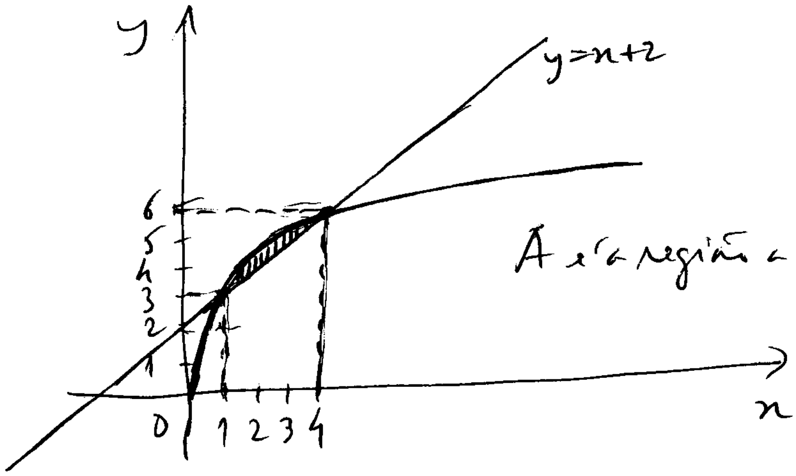
Por causa da "mera" implicação acima, temos que proceder à seguinte verificação: $\sqrt{9 \times 1} = 1+2 \Leftrightarrow 3 = 3$ ✓;

$\sqrt{9\times 4} = 4+2 \Leftrightarrow 6=6$ ✓.

Assim, $\begin{cases} y = x+2 \\ y = \sqrt{9x} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \vee x=4 \\ y = x+2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ y=3 \end{cases} \vee \begin{cases} x=4 \\ y=6 \end{cases}$

$\therefore$ Os pontos de interseção pedidos são $(1,3)$ e $(4,6)$.

(b)



A é a região a sombreado.

(c) $\text{"Área de } A\text{"} = \displaystyle\int_1^4 \sqrt{9x} - (x+2)\, dx =$

$= \displaystyle\int_1^4 3 \cdot x^{1/2} - x - 2\, dx = \left[\cancel{3} \cdot \frac{x^{3/2}}{\frac{\cancel{3}}{2}} - \frac{x^2}{2} - 2x \right]_1^4$

fórmula de Barrow

$= 2\sqrt{4^3} - \frac{16}{2} - 8 - \cancel{2} + \frac{1}{2} + \cancel{2}$

$= \cancel{16} - \cancel{8} - \cancel{8} + \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$.

5. (a) $\displaystyle\int \frac{x^3}{\sqrt{2+x^2}}\, dx = \int x^2 \cdot \frac{2x}{2\sqrt{2+x^2}}\, dx =$

primitivação por partes

$= \sqrt{2+x^2} \cdot x^2 - \displaystyle\int \sqrt{2+x^2} \cdot 2x\, dx = x^2\sqrt{2+x^2} - \frac{(2+x^2)^{3/2}}{\frac{3}{2}} + C$

$= x^2\sqrt{2+x^2} - \frac{2}{3}\sqrt{(2+x^2)^3} + C$, em intervalos do domínio.

Obs.: A resolução feita é porventura a mais fácil, mas eventualmente não evidente. Em alternativa, a primitivação poderia também ser feita através da mudança de variável natural $x=\sqrt{2}\,tg\,t$, de modo a poder-se tirar partido da identidade trigonométrica $tg^2 t+1=sec^2 t$ (que é uma consequência imediata da fórmula fundamental da trigonometria).

(b) Pretende-se $F(x)=x^2\sqrt{2+x^2}-\frac{2}{3}\sqrt{(2+x^2)^3}+C$ tal que $F(1)=0$, ou seja, tal que

$$1^2\cdot\sqrt{2+1^2}-\frac{2}{3}\sqrt{(2+1^2)^3}+C=0,$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{3}-\frac{2}{3}\sqrt{3^3}+C=0$$

$$\Leftrightarrow C=\frac{2}{\cancel{3}}\cdot\cancel{3}\sqrt{3}-\sqrt{3} \Leftrightarrow C=\sqrt{3}.$$

$$\therefore F(x)=x^2\sqrt{2+x^2}-\frac{2}{3}\sqrt{(2+x^2)^3}+\sqrt{3}.$$

6. $f,g:[a,b]\to\mathbb{R}$ regulares; $g'(x)\neq 0,\ \forall x\in]a,b[$.

(a) Se $g(a)=g(b)$, o Teorema de Rolle seria aplicável a g e concluir-se-ia que $\exists c\in]a,b[:g'(c)=0$. Como isto contraria uma das hipóteses dadas no enunciado, então tem que ser $g(a)\neq g(b)$.

(b) $$F(x):=f(x)-f(a)-\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}(g(x)-g(a))$$

$$\therefore F(a)=0;\ F(b)=f(b)-f(a)-\frac{f(b)-f(a)}{\cancel{g(b)-g(a)}}\cancel{(g(b)-g(a))}$$

$$=\cancel{f(b)}-\cancel{f(a)}-\cancel{f(b)}+\cancel{f(a)}=0.$$ Logo $F(a)=F(b)$.

Como f e g são contínuas em $[a,b]$, pela álgebra das funções contínuas sai que também F é contínua em $[a,b]$.

Como f e g são diferenciáveis em $]a,b[$, pela álgebra das funções diferenciáveis sai que também F é diferenciável em $]a,b[$.

Logo F é regular em $[a,b]$.

Como também já vimos que $F(a)=F(b)$, então encontram-se satisfeitas as hipóteses do Teorema de Rolle para F em $[a,b]$.

ii. Aplicando o Teorema de Rolle a F em $[a,b]$ obtém-se que $\exists c \in]a,b[: F'(c)=0$.

Ora $F'(x) = f'(x) - \dfrac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} \cdot g'(x)$, logo, para o mesmo $c \in]a,b[$,

$$0 = F'(c) = f'(c) - \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} g'(c),$$

$$\Rightarrow f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} g'(c),$$

$$\Leftrightarrow \frac{f'(c)}{g'(c)} = \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}.$$

Obs.: Este exercício é essencialmente a resolução do exercício na secção 1.5 do texto de apoio (versão de 2016/17) onde se pede para se provar o chamado Teorema de Cauchy.

ACastro
18-11-2016